

---

# Odvođenje matematického modelu hnacieho mechanizmu pre pohon prídavných zariadení dopravného prostriedku

---

## Ján Dižo, doc. Ing., PhD.\*

Katedra dopravnej a manipulačnej techniky, Strojnícka fakulta,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.  
E-mail: jan.dizo@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 2560

## Vadym Ishchuk, Ing.

Katedra dopravnej a manipulačnej techniky, Strojnícka fakulta,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.  
E-mail: vadym.ishchuk@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 2563

## Alyona Lovska, prof. Ing., Dr.Sc. Tech.

Katedra dopravnej a manipulačnej techniky, Strojnícka fakulta,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.  
E-mail: alyona.lovska@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 2660

## Miroslav Blatnický, doc. Ing., PhD.

Katedra dopravnej a manipulačnej techniky, Strojnícka fakulta,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.  
E-mail: miroslav.blatnický@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 2659

## Denis Molnár, Ing.

Katedra dopravnej a manipulačnej techniky, Strojnícka fakulta,  
Žilinská univerzita v Žiline,  
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.  
E-mail: denis.molnar@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 2659

## Derivation of a mathematical model of a drive mechanism for the drive of additional devices of a transport means

**Abstract:** The article is focused on a derivation of a mathematical model of a drive mechanism of for a drive of an additional devices of a transport mean. Additional devices are inseparable part of lorries, buses as well as railway vehicles, such as locomotives with independent traction. These additional devices serve for drive of compressors or other similar devices. The mathematical model is derived by means of the *Lagrange's equations of the second kind method*. After finding the energies, *the method of the reduction of mass and force quantities* to the chosen part. In this case, it is reduced to the drive shaft of the considered mechanism. The presented mechanism is described by means of one equation of motion. This equation can be solved by means of the *Matlab* software. The last part of the article additional includes illustrations of the solved mechanism created in the *Simpack* multibody software, which can be analysed and the results can be compared with the results obtained from the *Matlab* software.

**Keywords:** mathematical model, *Matlab* software, *Simpack* software, equation of motion, drive mechanism, transport mean.

---

## ÚVOD

Prídavné zariadenia dopravných prostriedkov sú v súčasnosti ich neoddeliteľnou súčasťou. Bez týchto

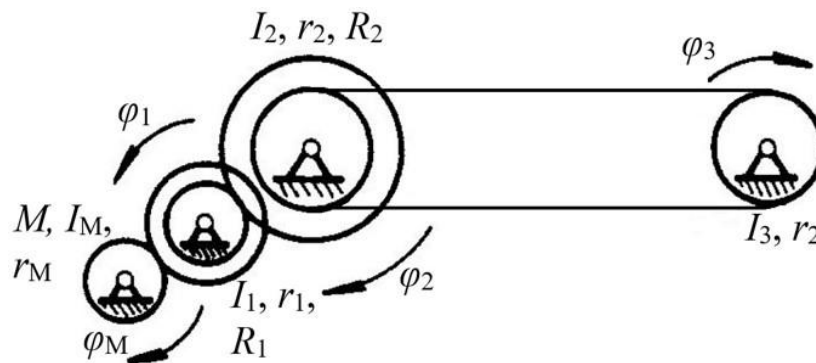
zariadení už nie je možné, aby spoľahlivo pracovali rôzne druhy dopravných prostriedkov. Prídavné zariadenia môžu byť použité na rôznu činnosť. Ak ide o nákladné automobily [1], autobusy alebo

koľajové vozidlá s nezávislou trakciou prípadne aj závislou trakciou [2-5], spaľovací motor, prípadne aj elektromotor poháňa pomocou mechanického pohonu kompresor ako zdroja stlačeného vzduchu. Existujú aj ďalšie typy prídavných zariadení, ktoré potrebujú pre pohon aj zdroj, ako je motor a od neho je hnané toto zariadenie.

Cieľom tohto príspevku je predstavenie odvodenia matematického modelu hnacieho mechanizmu pre pohon prídavných zariadení dopravného prostriedku [6, 7]. Takýto matematický model je možné použiť pre vyšetovanie dynamických javov súvisiacich s pracovnou činnosťou prídavného zariadenia. Matematický model je zostavený pomocou metódy *Lagrangeových rovníc druhého druhu*. Následne bola aplikovaná *metóda redukcie hmotnostných a silových veličín*. Sústava je redukovaná na hnačí hriadeľ pohonného mechanizmu. Takýto model je možné riešiť v programe *Matlab* a vyšetovať dynamické vlastnosti. V ďalšej časti je ešte doplnený aj model viazanej mechanickej sústavy (angl. *multibody system*) hnacieho mechanizmu pre pohon vytvorený v programe *Simpack*.

## 1 POSTUP ODVODENIA MATEMATICKÉHO MODELU

Postup odvodenia matematického modelu hnacieho mechanizmu pre pohon prídavných zariadení dopravného prostriedku je založený na uvažovaní vhodného dynamického modelu. Dynamický model, t. j. výpočtová schéma, je zobrazený na obr. 1 [8].



Obr. 1. Dynamický model (výpočtová schéma) uvažovaného hnacieho mechanizmu

Úlohou je odvodiť matematický model hnacej sústavy, ktorá je zobrazená na obr. 1. Vidíme, že táto hnacia sústava sa skladá so štyroch kolies, ktoré sú označené  $M$ , 1, 2 a 3. Súčasťou hnacej sústavy je remeň. Kolesá  $M$ , 1 a 2 sú ozubené kolesá.

Geometria kolesa 2 je prispôbená tak, aby časť kolesa bola hnaná od kolesa 1 a na druhej jeho časti bol napojený hnačí remeň, ktorý potom poháňa koleso 3.

Matematický model bude zostavený pomocou *metódy redukcie hmotnostných a silových veličín*,

pričom sa vychádza z *metódy Lagrangeových rovníc druhého druhu*. Ich všeobecný tvar je [9]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_P}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

kde  $E_K$  - kinetická energia sústavy,

$E_D$  - disipatívna energia sústavy,

$E_P$  - potenciálna energia sústavy,

$\dot{q}_i, q_i$  - zovšeobecnená rýchlosť, resp.

zovšeobecnená súradnica sústavy,

$Q_i$  - vonkajšie zaťaženie sústavy,

$i$  - počet stupňov voľnosti sústavy.

Vo všeobecnom tvare je kinetická energia sústavy daná vzťahom:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \dot{\varphi}_i^2, \quad (2)$$

kde  $I_i$  - hmotné momenty zotrvačnosti jednotlivých komponentov sústavy,

$\dot{\varphi}_i$  - uhlové rýchlosti týchto komponentov,

pričom  $\varphi$  je zovšeobecnená súradnica sústavy.

Keďže v sústave sú uvažované iba tuhé telesá a sústava nemení svoju výškovú polohu, potenciálna energia sústavy je rovná nule:

$$E_P = 0. \quad (3)$$

Ďalej v sústave nie je uvažovaný ani tlmiaci člen a ani trenie. Teda ide o konzervatívnu sústavu, v ktorej disipatívna energia je tiež rovná nule:

$$E_D = 0. \quad (4)$$

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme uhlovú výchylku  $\varphi_M$  hnacieho hriadeľa  $M$ .

Pri preskúmaní dynamickej sústavy vidíme, že kinetická energia sústavy je vo všeobecnom tvare:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot I_M \cdot \dot{\varphi}_M^2 + \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \dot{\varphi}_3^2, \quad (5)$$

kde  $I_M, I_1, I_2, I_3$  - hmotné momenty zotrvačnosti kolies  $M, 1, 2$  a  $3$ ,

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  - uhlové výchylky jednotlivých kolies hnacieho mechanizmu (obr. 1).

Keďže má riešený mechanizmus iba jeden stupeň voľnosti, ktorý je vyjadrený zovšeobecnenou súradnicou  $\varphi_M$ , je nevyhnutné aj ostatné súradnice ( $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ) vyjadriť pomocou tejto zovšeobecnenej súradnici. To vykonáme pomocou uvažovania prevodových pomerov v hnacom mechanizme.

Prevodový pomer  $i_{M1}$  medzi kolesami  $M$  a 1 bude:

$$i_{M1} = \frac{D_1}{d_M} = \frac{n_M}{n_1}. \quad (6)$$

Po dosadení parametrov dostaneme:

$$i_{M1} = \frac{2 \cdot R_1}{2 \cdot r_M} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega_M}{2 \cdot \pi \cdot \omega_1} \quad (7)$$

kde  $r_M, R_1$  - polomery kolies mechanizmu podľa obr. 1,

$\omega_M, \omega_1$  - uhlové rýchlosti otáčania kolies  $M$  a 1.

Po dosadení dostaneme vzťah pre  $\varphi_1$ :

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{r_M}{R_1} \cdot \dot{\varphi}_M \Rightarrow \varphi_1 = \frac{r_M}{R_1} \cdot \varphi_M. \quad (8)$$

Prevodový pomer  $i_{12}$  medzi kolesami 1 a 2 je:

$$i_{12} = \frac{R_2}{r_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (9)$$

potom pri uvažovaní vzťahu (8) dostaneme:

$$\varphi_2 = \frac{r_1}{R_2} \cdot \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{r_1}{R_2} \cdot \frac{r_M}{R_1} \cdot \varphi_M, \quad (10)$$

kde  $r_1, R_2$  sú polomery kolies mechanizmu podľa obr. 1.

Prevodový pomer  $i_{23}$  medzi kolesami 2 a 3 je:

$$i_{23} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}, \quad (11)$$

potom pri uvážení vzťahu (8):

$$\varphi_3 = \varphi_2 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{r_1}{R_2} \cdot \frac{r_M}{R_1} \cdot \varphi_M. \quad (12)$$

kde  $r_1, R_2$  sú polomery kolies mechanizmu podľa obr. 1.

Konečný tvar kinetickej energie potom bude:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot I_M \cdot \dot{\varphi}_M^2 + \frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \left( \frac{r_M}{R_1} \cdot \dot{\varphi}_M \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \left( \frac{r_1}{R_2} \cdot \frac{r_M}{R_1} \cdot \dot{\varphi}_M \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \left( \frac{r_1}{R_2} \cdot \frac{r_M}{R_1} \cdot \dot{\varphi}_M \right)^2 \quad (13)$$

Teraz je možné vykonať derivácie energie podľa zovšeobecnenej súradnice  $\varphi_M$ , resp. podľa zovšeobecnenej rýchlosti  $\dot{\varphi}_M$ .

Výsledná pohybová rovnica hnacieho mechanizmu podľa obr. 1 je:

$$\left[ I_M + I_1 \cdot \frac{r_M^2}{R_1^2} + (I_2 + I_3) \cdot \frac{r_1^2}{R_2^2} \cdot \frac{r_M^2}{R_1^2} \right] \cdot \ddot{\varphi}_M = M, \quad (14)$$

resp. v stručnej forme bude mať pohybová rovnica tvar:

$$I_{red} \cdot \ddot{\varphi}_M = M, \quad (15)$$

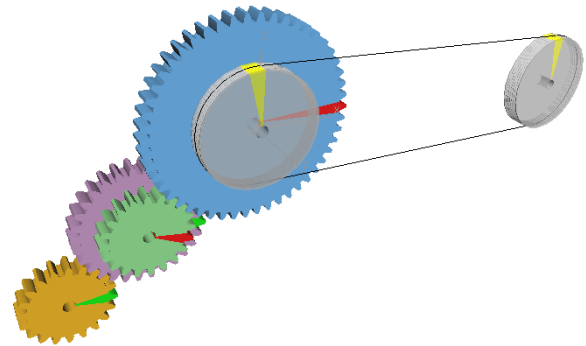
kde  $I_{red\_M}$  - hmotný moment mechanizmu redukovaný na koleso  $M$  (obr. 1),

$M$  - hnací moment pôsobiaci na koleso  $M$  (obr. 1).

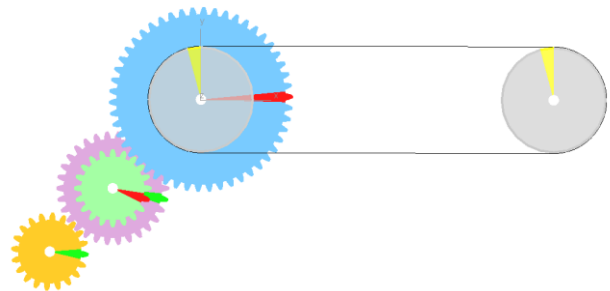
Vytvorený matematický model, teda pohybová rovnica, sa môže riešiť pomocou programu *Matlab*, *MathCad* alebo iným, ktorý umožňuje výpočet diferenciálnej rovnice. Pomocou nej potom môžeme skúmať dynamické vlastnosti hnacieho mechanizmu.

## 2 MBS MODEL RIEŠENÉHO HNACIEHO MECHANIZMU

Ako ďalší krok tejto práce bol vytvorený virtuálny model riešeného hnacieho mechanizmu pre pohon prídavných zariadení dopravného prostriedku. Ide o model viazanej mechanickej sústavy (*multibody model*), ktorý bol vytvorený v prostredí programu *Simpack*. Model je zobrazený na obr. 2 a obr. 3.



Obr. 2. Priestorový 3D MBS model hnacieho mechanizmu v programe *Simpack*



Obr. 3. MBS model hnacieho mechanizmu - nárys

Tento model pozostáva zo štyroch tuhých telies, ktoré reprezentujú ozubené kolesá prevodu a ktoré sú označené ako  $M, 1, 2$  a  $3$  (obr. 1). Tieto kolesá boli

vytvorené v programe ako tuhé telesá. Tieto telesá sú v programe označené ako *Bodies*. Pre potreby simulačného modelu majú definovaný hmotný moment zotrvačnosti kolo osi rotácie.

Prevodový pomer  $i$  je predpísaný priamo v programe prostredníctvom na to určeného špecializovaného modelovacieho prvku.

Ďalej, tieto kolesá (telesá) majú definovaný stupeň voľnosti pomocou mechanických rotačných väzieb, ktoré im umožňujú konať predpísaný rotačný pohyb. Tieto modelovacie prvky sa v programe *Simpack* nazývajú *Joint*.

Na hnacie koleso potom pomocou modelovacieho prvku *Force Element* pôsobí hnací moment  $M$ . Moment je definovaný ako časová funkcia a používateľ môže jednoduchým spôsobom zmeniť smer otáčania sústavy, ako aj parametre hnacieho momentu.

Model pásu, resp. remeňa, ktorý tvorí väzbu medzi kolesom 2 a 3, boli vytvorené priamo pomocou modelovacieho prvku *Belt*. V tomto modelovacom prvku je možné vybrať druh remeňa, ktorý je vhodný pre riešenie sústavy.

Takto vytvorené modely budú ďalej skúmané z hľadiska ich dynamických vlastností. Budú sa porovnávať výsledky z programu *Matlab* a *Simpack*, čo umožní verifikáciu dosiahnutých výsledkov a overenie správnosti postupu pri tvorbe a odvodení matematického modelu.

## ZÁVER

Cieľom predkladaného príspevku bolo predstavenie postupu odvodenia matematického modelu hnacieho mechanizmu pre pohon prídavných zariadení dopravného prostriedku. Takéto prídavné zariadenie môže byť napríklad kompresor alebo čerpadlo ako zdroj stlačeného vzduchu, resp. tlakovej kvapaliny. Matematický model bol odôvodnený *metódou Lagrangeových rovníc druhého druhu* a následne bola aplikovaná *metóda redukcie hmotnostných a silových veličín*. To viedlo k výslednej pohybovej rovnici druhého rádu s konštantnými koeficientami s pravou stranou. Táto rovnica môže byť riešená v programe *Matlab*. Výstupom budú grafy výstupných veličín z hľadiska dynamického správania sa tejto sústavy. Obsah príspevku je doplnený o tvorbu *MBS* modelu riešenej hnacej sústavy v programe *Simpack*. Po zadaní vstupných parametrov do modelu je potom možné získať grafické priebehy výstupných veličín, ktoré sa zobrazia v module *Simpack PostProcessor*.

## Pod'akovanie

„Financované EÚ NextGenerationEU prostredníctvom Plánu obnovy a odolnosti SR v rámci projektu č. 09I03-03-V01-00131.“

*Táto práca vznikla vďaka podpore projektu KEGA 031ŽU-4/2023: Rozvoj kľúčových kompetencií absolventa študijného program Vozidlá a motory.*

## LITERATÚRA

- [1] DIŽO, J. - BLATNICKÝ, M. - MELNIK, R. - KRAVCHENKO, O. (2022): *A mathematical model of operation of a semi-trailer tractor powertrain*. In: Communications - Scientific Letters of the University of Žilina, Vol. 24, No. 3, pp. B267-B274, ISSN 1335-4205.
- [2] DIŽO, J. - BLATNICKÝ, M. - ISHCHUK, V. - MOLNÁR, D. (2023): *Derivation of a simplified mathematical model of a DMU'S powertrain*. In: Súčasné problémy v koľajových vozidlách, zborník prednášok, , pp. 101-108, ISBN 978-80-89276-61-5.
- [3] GUOSONG, W. - LONGJIANG, S. - YUAN, Y. - WENSHENG, S. - JINGCHUN, H. (2023): *Determination of the dynamic characteristics of locomotive drive systems under re-adhesion conditions using wheel slip controller*. In: Journal of Zhejiang University: Science A, Vol. 24, No. 8, pp. 722-734, ISSN 1673-565X.
- [4] VISHAL, P. - AMANDEEP, G. - CHINMAY, M. - MANJEET, S. (2023): *Simulation and Analysis of Electric Vehicle System*. In: 3rd IEEE International Conference on Sustainable Energy and Future Electric Transportation, SeFet, Bhubaneswar, 9-12 August, ISBN 979-835031997-2.
- [5] AMMAR MISHAL ABD-ELRASOOL ELAGAB - IBRAHIM EL-AMIN (2022): *The Impact of Electrical Traction Drives on Power System Quality under Different Loading Conditions*. In: Arabian Journal for Science and Engineering, Vol. 47, No. 11, pp. 14695-14710, ISSN 2193-567X.
- [6] GABBERT, U. - DUVIGNEAU, F. - RINGWELSKI, S. (2017): *Noise control of vehicle drive systems*. In: Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering, Vol. 15, No. 2, pp. 183-200, ISSN 0354-2025.
- [7] DIŽO, J. - BLATNICKÝ, M. - ISHCHUK, V. - KOZÁKOVÁ, K. - SEMENOV, S. - MIKHAILOV, E. (2023): *A mathematical model of the diesel-mechanical power transmission of a railway vehicle*. In: Transport means: Sustainability: research and solutions: proceedings, 1. vyd., Kaunas: Kauno Technologijos Universitetas, pp. 237-243, ISSN 1822-296X.
- [8] BRÁT, V. - STEJSKAL, V. - VOTÍPKA, F. (1980): *Základy dynamiky strojů a konstrukcií*. Praha: Vydavatelství ČVUT.
- [9] FILO, V. - LUKÁČ, M. (2005): *Modelovanie a simulácia mechanizmov s počítačovou podporou*. Žilinská univerzita v Žiline, 216 s, ISBN 80-8070-466-X.