ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Strojnícka
fakulta

DOI: https://doi.org/10.26552/tech.C.2024.2.15

Aplikácia integrálnych transformácií na určenie vzťahu rozptylu morskej vlny od nadmorskej výšky hladiny mora

Zuzana Malacká, RNDr., PhD.*
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovenská republika.
E-mail: zuzana.malacka@fstroj.uniza.sk, Tel.: + 421 41 513 4961

Radoslav Chupáč, RNDr., PhD.
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovenská republika.
E-mail: radoslav.chupac@fstroj.uniza.sk, Tel.: + 421 41 513 4954

Application of integral transformations to determine the relation of sea wave dispersion to sea level elevation

Abstract: The focus of this paper is the linear problem of gravity waves on the surface of a viscous incompressible fluid with a constant finite depth. This problem arises when the free surface is in a state of rest and there is a finite perturbation and a given normal pressure on it. We resolve the time evolution of the initial surface perturbation, or the classical linear *Cauchy-Poisson* problem, in the presence of a uniformly vorticous shear current beneath the surface. The solution is general, including the effects of gravity, surface tension, and constant finite depth. The main goal of this paper is to study such a problem, which appears to be important and interesting from a mathematical as well as a physical point of view. The problem is solved by using the *Laplace* and *Henkel transformations*, and we get an integral solution.

Keywords: differentia equation, integral transformations, waves problem.

ÚVOD (DOTERAJŠIE POZNATKY)

Feynman povedal, že vodné vlny, ktoré každý ľahko vidí a ktoré sa používajú ako príklad vĺn na základných kurzoch, sú najhorším možným príkladom. Majú všetky komplikácie, ktoré vlny môžu mať.

Vlny na hladine oceánu sú dramatickým a krásnym javom, ktorý ovplyvňuje každý aspekt života na planéte. Na malých dĺžkových mierkach vlnenie poháňané povrchovým napätím na povrchu týchto „vodných vĺn“ ovplyvňuje diaľkové snímanie podvodných prekážok. V stredných mierkach vlny na povrchu a rozhraní medzi vnútornými vrstvami vody rôznych hustôt ovplyvňujú lodnú dopravu, morfológiu pobrežia a plavbu v blízkosti pobrežia. Pri väčších dĺžkach môžu vlny *tsunami* a *hurikány* spôsobiť devastáciu v celosvetovom meradle. Okrem toho vodné vlny zohrávajú kľúčovú úlohu vo všetkých dĺžkových mierkach pri zmene hybnosti a tepelnej energie medzi oceánom a atmosférou, čo zase ovplyvňuje globálny systém počasia a klímu. Z matematického hľadiska rovnice vodných vĺn predstavujú vážne výzvy pre dôslednú analýzu, modelovanie a numerickú simuláciu. Klasické problémy s vodnými vlnami sa väčšinou riešili za predpokladu harmonickej oscilácie v čase. Tento predpoklad poskytuje veľa výhod v analýze daného problému. Sú však situácie, kedy sú potrebné nejaké začiatočné podmienky. Najznámejší je *Cauchy-Poissonov* problém aplikovaný na vodných vlnách. Pretože tento prístup vyžaduje začiatočnú podmienku pre začiatočnú eleváciu a začiatočnú hodnotu potenciálu, tak sa pre začiatočný impulz prijala delta funkcia. Preto sa takýto prístup považuje za prístup založený na fyzike.

Riadiace rovnice sú široko akceptované a existuje rozsiahly výskum ich platnosti. Dôkladná teória ich riešení je však mimoriadne zložitá nielen preto, že problém vodnej vlny je klasickým problémom s voľnými hranicami, kde je neznámy tvar domény, ale aj preto, že okrajové podmienky sú silne nelineárne. Je dobre známe, že samotná existencia riešení rovníc, ktoré opisujú pohyb tekutín, aj keď neexistujú voľné hranice, je jednou z najťažších nezodpovedaných otázok v matematike.

Problém generovania povrchových vĺn v dôsledku explózie nad vodou alebo vo vode môže byť formulovaný ako problém začiatočnej hodnoty za predpokladu lineárnej teórie vodných vĺn. Výbuch môže nastať nad alebo pod hladinou oceánu. Keď k výbuchu dôjde vo vode, začiatočný stav sa berie ako začiatočné posunutie (elevácia alebo depresia) rozložené v určitej oblasti voľného povrchu. Na druhej strane, začiatočný stav možno považovať za začiatočný impulzívny tlak rozložený na špecifickú oblasť voľnej hladiny, keď k výbuchu dôjde nad vodou [1-3].

Mnohí autori sa zaoberali *Cauchy-Poissonovým* problémom aplikovaným na vodných vlnách [4-8].

V našom príspevku hľadáme integrálne riešenie, daného problému.

Na riešenie sme použili *Laplaceovú* a *Henkelovú transformáciu* [9].

Teória integrálnych transformácií má históriu okolo 200 rokov. Teória rozdelenia integrácii však existuje len 95 rokov. Niektoré teórie rozdelenia nájdete v [12]. Autor sa pokúsil rozšíriť myšlienku a klasické operácie na širšiu oblasť, kde je možné vyriešiť *Cauchyho problém*.

20. storočie „možno právom nazvať storočím funkcionálnej analýzy". Treba poznamenať, že teória distribúcií hrá významnú úlohu v sektore aplikácií funkcionálnej analýzy. Iné prístupy k teórii distribúcie autori poskytli v [11, 13].

Dirac delta funkcia, $\delta(x)$ sa dá neformálne popísať ako funkcia, ktorá má v nule hodnotu nekonečno všade inde nulovú.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pre } x = 0 \\ 0 & \text{pre } x \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Je definovaná tak, že:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt = H(x), \tag{2}$$

kde $H(x)$ je *Heavisideova funkcia*.

Matematicky presná definícia je, že *Diracova delta* nie je funkcia, ale distribúcia.

Najskôr si uvedieme definíciu *Laplaceovej transformácie*.

Laplaceova transformácia funkcie $f(t)$ je označovaná $\mathscr{L}$ a definovaná ako:

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad \text{Re } s > 0, \tag{3}$$

kde e^{-st} je *jadro* transformácie a s je transformovaná premenná, ktorá je komplexné číslo.

Vzhľadom na podmienky pre $f(t)$, jej transformácia $\overline{f}(s)$ je analytická v s len v polrovine, kde Re $s > a$.

Formálna definícia spätnej Laplaceovej transformácie $\mathscr{L}^{-1}$ je :

$$\mathscr{L}^{-1}\{\overline{f}(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\overline{f}(s)ds, \tag{4}$$

$c > 0$.

Herman Hankel (1839-1873), *nemecký* matematik je známy pre jeho mnohé prínosy v matematickej analýze vrátane *Hankelovej transformácie*. Študoval aj *Besselove funkcie*. *Hankelova transformácia* zahŕňajúca *Besselovu funkciu* vzniká v osovo symetrických problémoch formulovaných v cylindrických polárnych súradniciach.

1 BESSELOVE FUNKCIE

Funkcie $J_v(x)$ sú riešenia *Besselovej rovnice*:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0, \tag{5}$$

kde $v \geq 0$ je ľubovoľné reálne číslo sa tiež nazýva rád *Besselovej funkcie*.

Túto rovnicu zaraďujeme do lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu. Funkcie sú pomenované na počesť nemeckého matematika a fyzika *Friedricha Wilhelma Bessela*, ktorý ich ako prvý riešil.

Ak $v = n$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta, \tag{6}$$

alebo

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} e^{i(n\theta - x\sin\theta)}d\theta \quad [2]. \tag{7}$$

Ďalej si uvedieme definíciu priamej a spätnej *Hankelovej transformácie,* ktorá je definovaná z dvojrozmernej *Fourierovej transformácie* nasledovne:

$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(k,l) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\kappa,r)}f(x,y)dx\,dy, \tag{a}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k,l)\} = f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa,r)}F(k,l)dk\,dl, \tag{b}$$

kde $\boldsymbol{r} = (x,y)$, $\boldsymbol{\kappa} = (k,l)$.

Ak použijeme polárne súradnice:

$$x = r.\cos\theta, \qquad k = \kappa.\cos\phi,$$
$$y = r.\sin\theta, \qquad l = \kappa.\sin\phi,$$

kde $r,\kappa \in \langle 0,\infty)$ a $\theta,\phi \in \langle 0,2\pi)$ a hodnota *Jakobiánu* $J = r$.

Potom:

$$\boldsymbol{r}.\boldsymbol{\kappa} = \kappa.r(\cos\phi\,\cos\theta - \sin\phi\,\sin\theta) = \kappa.r\cos(\theta - \phi). \tag{8}$$

Označme $F(\kappa.\cos\phi, \kappa.\sin\phi) = G(\kappa,\phi)$,

kde:

$$G(\kappa,\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-i\kappa.r\cos(\theta-\phi)}f(r,\theta)r\,d\theta dr\ . \tag{c}$$

Ďalej predpokladáme, že $f(r,\theta) = e^{in\theta}f(r)$ a zmenou premennej $\theta - \phi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ sa vzťah (c) redukuje na:

$$G(\kappa,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{\frac{\pi}{2}-\phi}^{2\pi+\frac{\pi}{2}-\phi} e^{-i\kappa.rcos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} \,.\, e^{in.rcos\left(\alpha+\phi-\frac{\pi}{2}\right)}f(r)d\alpha dr \qquad (9)$$

Pretože $cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha,$ dostaneme:

$$G(\kappa,\phi)=e^{in\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\phi}^{2\pi+\frac{\pi}{2}-\phi} e^{i(n\alpha-\kappa r\sin\alpha)}d\alpha\right]f(r)rdr. \qquad (10)$$

Použitím integrálnej reprezenentácie *Besselovej funkcie* rádu *n*, máme

$$G(\kappa,\phi)=e^{in\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\infty} rJ_n(\kappa r)f(r)rdr = e^{in\left(\phi-\frac{\pi}{2}\right)}\widetilde{f_n}(\kappa), \qquad (11)$$

kde $\widetilde{f_n}(\kappa)$ sa nazýva *Hankelova transformácia* funkcie $f(r)$, je formálne definovaná:

$$\widetilde{f_n}(\kappa)=\mathrm{H_n}\{f(r)\}=\int_0^{\infty} rJ_n(\kappa r)f(r)dr. \qquad (12)$$

Podobne, použitím polárnych súradníc $f(x,y)=f(r,\theta)=e^{in\theta}f(r),\ J=\kappa,$ a inverznej *Fourierovej transformácie* máme:

$$e^{in\theta}f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{i\kappa.rcos(\theta-\phi)}G(\kappa,\phi)\,\kappa d\phi d\kappa. \qquad (13)$$

Substitúciou premenných $\theta-\phi=-\alpha-\frac{\pi}{2}$, dotávame :

$$e^{in\theta}f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)} e^{i\kappa.rcos\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} \,.\, e^{in(\theta+\alpha)}\widetilde{f_n}(\kappa)kd\alpha d\kappa =$$

$$= e^{in\theta}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\theta-\frac{\pi}{2}}^{2\pi+\left(-\theta-\frac{\pi}{2}\right)} e^{i(n\alpha-\kappa rsin\alpha}\,d\alpha\right], \qquad (14)$$

$$\widetilde{f_n}(\kappa)\kappa d\kappa = e^{in\theta}\int_0^{\infty}\kappa J_n(\kappa r)\widetilde{f_n}(\kappa)d\kappa. \qquad (15)$$

Takže, spätná *Hankelova transformácia* je definovaná:

$$f(r)=\mathrm{H_n}^{-1}\{\widetilde{f_n}(\kappa)\}=\int_0^{\infty}\kappa J_n(\kappa r)\widetilde{f_n}(\kappa)d\kappa. \qquad (16)$$

2 CYLINDRICKÝ CAUCHY-PIOSSONOV PROBLÉM TÝKAJÚCI SA VLNY NA VODNEJ HLADINE

Uvažujme vlnu na vodnej hladine konečnej hĺbky *h* s voľným horizontálnym povrchom pri z = 0 a osou *z* kladne nahor. Predpokladáme, že kvapalina má konštantnú hustotu *ρ* bez povrchového napätia.

Povrchové vlny sa vytvárajú vo vode, ktorá je na začiatku v pokoji.

V cylindrických polárnych súradniciach (r,θ,z), sú osovo symetrické rovnice vodnej vlny pre rýchlostný potenciál funkciou r,z,t: $\phi(r,z,t)$ a pre nadmorskú výšku vodnej hladiny platí $\eta(r,t)$:

$$\nabla^2\phi=\phi_{rr}+\frac{1}{r}\phi_r+\phi_{zz}=0,$$

$$0\le r<\infty,\quad -h\le z\le 0,\quad t>0 \qquad (17)$$

$$\phi_z-\eta_t=0,\quad \text{pre}\quad z=0\,,\quad t>0 \qquad (18)$$

$$\phi_t-g\eta=0,\quad \text{pre}\quad z=0\,,\quad t>0 \qquad (19)$$

$$\phi_z=0,\quad \text{pre}\quad z=-h\,,\ t>0\,, \qquad (20)$$

kde g je gravitačné zrýchlenie,

$\eta_0(r)$ je daná výška voľnej hladiny.

Rovnica (1) platí len pre opis prúdenia v nestlačiteľnej vizkóznej tekutine. Pre voľný povrch sú potrebné dve okrajové podmienky (2) a (3). Je taktiež daná linearizovaná kinematická okrajová podmienka voľného povrchu (4).

Keďže ideme riešiť začiatočnú úlohu, predpokladá sa, že špecifikujeme začiatočné podmienky:

$$\phi(r,0,0)=0\ \text{ a }\ \eta(r,0)=\eta_0(r)$$

$$\text{pre}\ \ 0\le r<\infty. \qquad (21)$$

Použijeme spolu *Laplaceovu* a *Hankelovu transformáciu* nultého rádu:

$$\tilde{\phi}(k,z,s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dt\int_0^{\infty} r\, J_0(\kappa r)\phi(r,z,t)dr \qquad (22)$$

na (1) až (4) a tak sa tieto rovnice redukujú na rovnice:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-k^2\right)\tilde{\phi}=0,$$

$$\frac{d\,\tilde{\phi}}{dz}-s\tilde{\eta}=-\tilde{\eta}_0(k),\qquad z=0, \qquad (23)$$

$$s\tilde{\phi}+g\tilde{\eta}=0,\qquad z=0,$$

$$\tilde{\phi}_z=0,\qquad z=-h,$$

kde $\tilde{\eta}_0(k)$ je *Hannkelova transformácia* rádu nula na $\eta_0(r)$.

Riešenia tohto systému sú:

$$\tilde{\phi}(k,z,s)=-\frac{g\tilde{\eta}_0(k)\cosh k(z+h)}{(s^2+\omega^2)\cosh kh}, \qquad (24)$$

$$\eta(k,s)=\frac{s\tilde{\eta}_0(k)}{(s^2+\omega^2)}, \qquad (25)$$

kde:

$$\omega^2=gk\tanh(kh). \qquad (26)$$

je známe ako *disperzný vzťah* medzi frekvenciou *ω* a počtom vĺn *k* vo vode hĺbky *h*. Fyzikálne tento rozptylový vzťah opisuje vzťah medzi zotrvačnými a gravitačnými silami.

Aplikovaním spätnej transformácie dostaneme integrálne riešenia:

$$\phi(r,z,t)=-g\int_0^{\infty} k\,J_0(\kappa r)\eta_0(k)\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \qquad (27)$$

$\eta(r,t) = J_0(\kappa r)\eta_0(k)\cos\omega t\, dk.$ (28)

Tieto vlnové integrály predstavujú presné riešenia pre ϕ a η pri akomkoľvek r a t, ale fyzikálne charakteristiky vlnových pohybov nimi nemožno opísať. Vo všeobecnosti presné určenie integrálov jeveľmi náročnou úlohou. Na vyriešenie tohto problému je potrebné a užitočné použiť asymptotické metódy. Na určenie základných charakteristík pohybov vĺn bude stačiť určiť (10) alebo (11) asymptoticky pre veľké hodnoty času a vzdialenosti fixne danými v tvare (*r*, *t*). Teraz prepíšeme $J_0(\kappa r)$ podľa asymptotického vzorca (asymptotický výsledok pre *Besselovu funkciu*:

$$J_0(\kappa r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k r}}\cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right), \text{ ak } \ r \to \infty) \quad (29)$$

pre $kr \to \infty$, a tak z (11) máme:

$$\eta(r,t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}}\int_0^\infty \sqrt{k}\,\tilde{\eta}_0(k)\cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)\cos\omega t\, dk \ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\int_0^\infty \sqrt{k}\,\tilde{\eta}_0(k)\exp\left[i\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{4}\right)\right]dk\,. \quad (30)$$

Aplikovaním *metódy stacionárnej fázy* na (30) získavame riešenia:

$$\eta(r,t) \sim \sqrt{\left[\frac{k_1}{rt|\omega''(k_1)|}\right]}\,\tilde{\eta}_0(k_1)\cos[t\omega(k_1) - \ k_1 r], \quad (31)$$

kde stacionárny bod $k_1 = \frac{gt^2}{4r^2}$ je koreň rovnice $\omega'(k) = \frac{r}{t}$.

Riešenie (13) neplatí, ak $\omega''(k_1) = 0$.

Pre dostatočne hlbokú vodu $kh \to \infty$, môžeme disperzný vzťah zapísať v tvare :

$$\omega^2 = gk. \quad (32)$$

Riešenie axisymetrického *Cauchy-Poissonovho* problému je založené na predpísanom začiatočnom posune jednotkového objemu, čo znamená, že:

$$\eta_0(r) = \frac{a}{2\pi r}\delta(r) \text{ a teda } \tilde{\eta}_0(k) = \frac{a}{2\pi}. \quad (33)$$

Takže asymptotické riešenie získame z (13) v tvare:

$$\eta(r,t) \sim \frac{agt^2}{4\pi\sqrt{2}r^3}\cos\left(\frac{gt^2}{4r}\right), \qquad gt^2 >> 4r. \quad (34)$$

Pochopenie vzájomného vzťahu nadmorskej výšky a rozptylu vlny je užitočné pre rôzne aplikácie najmä v pobrežných a námorných sektoroch. Uvedieme niektoré, kde je to možné využiť:

1. *Predpovedanie a modelovanie vĺn*:

Pochopením a popísaním rozptylových vzťahov je uľahčené predpovedanie toho, ako by sa vlny správali za rôznych podmienok na mori.

Výšky vĺn, trvanie a smer vĺn možno predpovedať pomocou matematických modelov založených na rozptylových vzťahoch, čo je nevyhnutné pre námornú bezpečnosť a efektívne plánovanie dopravy.

2. *Dizajn a navigácia lodí*:

Údaje o nadmorskej výške vodnej hladiny používajú konštruktéri lodí na vytváranie plavidiel, ktoré sú bezpečné na prevádzku v rôznych vodných podmienkach. To zahŕňa zohľadnenie manévrovateľnosti, stability a odporu vĺn. Údaje o nadmorskej výške hladiny mora sú často zahrnuté v námorných mapách a navigačných systémoch, aby pomohli kapitánom lodí a navigátorom plánovať trasy a vyhýbať sa nebezpečným situáciám.

3. *Inžinierstvo na pobreží*:

Vlny a príliv a odliv môžu mať negatívny vplyv na pobrežné oblasti. Pri budovaní pobrežných ochranných štruktúr, ako sú vlnolamy a morské múry, aby sa znížil vplyv vĺn na pobrežie a infraštruktúru, je nevyhnutné porozumieť nadmorskej výške hladiny mora.

4. *Zelená energia*:

Pri navrhovaní a optimalizácii konvertorov energie vĺn a iných systémov námornej obnoviteľnej energie zohrávajú rozhodujúcu úlohu rozptylové vzťahy. Údaje o nadmorskej výške hladiny mora sa používajú na usmernenie pri budovaní fariem s energiou vĺn vyhodnotením životaschopnosti zachytávania energie vĺn na konkrétnych miestach.

5. *Monitorovanie životného prostredia*:

Údaje o nadmorskej výške hladiny mora sú užitočné na sledovanie zmien hladiny mora v priebehu času. Štúdium zmeny klímy, hodnotenie jej účinkov na pobrežné oblasti a vytváranie plánov na budúce zvýšenie hladiny morí, to všetko závisí od týchto informácií.

ZÁVER

Aj keď sa vodné vlny javia ako veľmi zložité, mnohé aspekty možno pochopiť pomocou relatívne jednoduchých pojmov. Matematická analýza vodných vĺn má viac ako 300-ročnú históriu. V priebehu posledných dvoch desaťročí ďalší rozvoj matematickej teórie vodných vĺn pritiahol nový a rastúci záujem, čo viedlo k významnému pokroku.

Ak chceme rekonštruovať nelineárne vlny v prítomnosti horizontálne premenlivých prúdov (napr. *cunami* a *prílivové vrty*), tak sú potrebné ďalšie štúdie. Stále existuje veľa náročných otvorených problémov, ktoré sú relevantné pre praktické aplikácie a stimulujú vývoj nových jemných matematických konceptov. Jedným z nich je využívanie morských vĺn na výrobu elektriny - čistej energie pre našu planétu. Sme presvedčení, že vedecká komunita vynaloží všetko svoje úsilie na hľadanie nových a ďalších spôsobov, ako využiť vodné vlny.

Poďakovanie

Táto práca bola vytvorená v rámci projektu KEGA 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov pre zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni štúdia na technických VŠ.

LITERATÚRA

[1] SAFO, M. (1958): *On a generalization of concept of function*. In: Proc. Japan Acad. Vol. 34, p. 126-130.

[2] SCHWARTZ, L. (1945): *Generalizations of the notion of function and derivation*. In: Theory of distributions Ann Telecommunum, No 3, p. 135-140.

[3] VASAN, V. - OLIVERAS, K. L. (2017): *Water-wave profiles from pressure measurements*. In: Extensions Applied Mathematics Letters 68, p. 175-180.

[4] DEBNATH, L. (1989): *The linear and nonlinear Cauchy–Poisson wave problems for an inviscid or viscous liquid, in Topics in Mathematical Analysis*. In: Series in Pure Mathematics Vol. II edited by Th. M. Rassias (World Scientific), pp. 123-155.

[5] CASTRO, A. - LANNES, D. (2014): *Fully nonlinear long-wave models in the presence of vorticity*. In: Journal of Fluid Mechanics 759, p. 642-675.

[6] CRAIK, A. D. D. (2004): *The origins of water wave theory*. In: Annu. Rev. Fluid Mech. 36, p. 1-28.

[7] ELLINGSEN, S. Å. - BREVIK, I. (2014): *How linear surface waves are affected by a current with constant vorticity*. In: Eur. J. Phys. 35, 025005.

[8] OLIVERAS, K. L. - VASAN, V. - DECONINCK, B. - HENDERSON, D. (2012): *Recovering the water-wave profile from pressure measurements*. In: SIAM Journal on Applied Mathematics, 72(3), p. 897-918.

[9] DEBNATH, L. - BHATTA, D. (2007): *Integral Transform and Their Applications*. Chapman CRC Press Boca Raton Florida USA, pp. 315-339, ISBN 1-58488-575-0.

[10] SOBOLEV, S. L. (1936): *New method the Cauchy problem for hyperbolic linear equations Rec. Math*. [Mathematical collection] N.S 1(43) 1, p. 39-72.

[11] SIKORSKI, R. - MIKUSINSKI, J. (1957): *The elementary theory of distributions*. Warsaw.

[12] TEMPLE, G. (1955): *The Theory of generalized functions*. In: Proc. Roy. Soc. London Series A 228, p. 175-190

[13] SCHWARTZ, L. (1950): *Theory of distributions*. Vol. I.

[14] SCHWARTZ, L. (1951): *Theory of distributions*. Vol. II.