
Kinematická analýza paralelných mechanizmov pomocou Screw theory

Mária Michalková, Ing. RNDr., PhD.*

Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovenská republika.
E-mail: maria.michalkova@fstroj.uniza.sk

Vladimír Guldán, RNDr.

Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovenská republika.
E-mail: vladimir.guldán@fstroj.uniza.sk

Kinematic analysis of parallel mechanisms using Screw theory

Abstract: The aim of this paper is to summarise the mathematical basics of the *Screw theory* and its application in mechanics. The paper provides methodology for finding the degrees of freedom of the effector, as well as for determining its mobility. Furthermore, we give an input-output equation for velocities for the parallel mechanism, that allows to obtain the velocities of the effector and also of the actuated kinematic couples. These algorithms are applied to a planar parallel 3-RTR mechanism where we determine the degrees of freedom and mobility of the moving platform. We determine the input-output equation for velocities, and based on this we investigate the singularities of the moving platform.

Keywords: mobility of mechanism, differential kinematics, singularities, planar parallel manipulator.

ÚVOD

Výpočtové metódy v robotike zohrávajú čoraz výraznejšiu úlohu, a to predovšetkým z dôvodu neustále narastajúcej zložitosti robotických zariadení, požiadaviek na presnosť a stabilitu riadenia pohybu, predikciu vlastností ešte vo fáze návrhu, a podobne. Takéto úlohy nie je možné vykonávať bez detailného poznania kinematiky a dynamiky robotických zariadení, či už so sériovou, alebo paralelnou kinematickou štruktúrou. Na kinematickú a dynamickú analýzu mechanizmov sa v súčasnosti využíva niekoľko overených prístupov, ako napríklad formulácia pohybových rovníc a opis kinematickej štruktúry na základe *Denavit-Hartenbergovej* notácie, s využitím *Eulerových* uhlov, a podobne. Mnohé z týchto metód majú veľmi dobré uplatnenie v mechanizmoch so sériovou kinematickou štruktúrou. Na druhú stranu, pri mechanizmoch s paralelnou alebo hybridnou štruktúrou nie sme vždy schopní týmito konvenčnými prístupmi dospieť k spoľahlivému riešeniu.

Jednou z metód na riešenie kinematiky mechanizmov je aj *Screw theory* (v preklade *Teória skrutiek*). Táto teória poskytuje matematické nástroje na riešenie mnohých úloh - od vyšetrovania pohyblivosti mechanizmov, riešenia priamej a inverznej úlohy pre

rýchlosti, odhaľovania singulárnych polôh až po zohľadnenie redundantných aktuátorov.

Základy *Screw theory* boli položené už v polovici 19. storočia prácami *M. Chaslesa* a *L. Poinsota*, ktorí dali do súvisu všeobecný pohyb telesa so skrutkovým pohybom. Na základe toho uviedli tiež analógiu medzi pojmami translácie a vektora sily a rotácie a momentu sily. Na ich práce nadviazal *J. Plücker*. Jeho prínosom je najmä zadefinovanie homogénnych súradníc pre priamky, pretože priamky môžeme chápať ako špeciálny typ skrutky [1]. *Plückerove* výsledky z oblasti geometrie priamok využil *Ball* vo svojej rozsiahlej práci venovanej *Screw theory* a publikovanej pod názvom *The Theory of Screws* v roku 1876. Zadefinoval pojem bázičných skrutiek, prostredníctvom ktorých bolo možné popísať ľubovoľné posunutie telesa. Takmer súbežne sa oblasťou skrutiek z hľadiska ich matematického chápania zaoberal *W. Clifford*, ktorý ako prvý zapísal skrutku v tvare duálneho vektora pripomínajúceho svojou podobou komplexné číslo.

Obdobie rozvoja *Screw theory* končí na prelome 19. a 20. storočia. Po období útlmu bola znovuobjavená až v polovici 20. storočia *K. H. Huntom*. Problematike *Screw theory* a jej aplikácii pri analýze sériových a paralelných mechanizmov sa venoval v mnohých

článkoch ako aj v monografiách (*Mechanisms and Motion, Kinematic Geometry of Mechanisms, Robots and Screw theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics*). Na tieto práce nadviazali mnohí, ktorí pokračovali v rozvíjaní teoretických základov, napr. [2, 3], a v súčasnosti je *Screw theory* využívaným nástrojom pre riešenie kinematiky sériových [4, 5], ale najmä paralelných mechanizmov [6-10].

1 MATEMATICKÝ KONCEPT SCREW THEORY

V tejto časti si ozrejmime základné pojmy matematického aparátu *Screw theory*. Zadefinujeme pojem *skrutky* (*screw*) ako duálneho vektora, jej charakteristiky, ako aj operácie so skrutkami.

1.1 Skrutka, priamkový vektor, dvojica

Skrutkou (*screw*) $\$$ nazývame usporiadanú dvojicu vektorov $\mathbf{s}, \mathbf{s}^0 \in R^3$, zapísanú v tvare duálneho vektora

$$\$ = (\mathbf{s}, \mathbf{s}^0). \quad (1)$$

Vektor \mathbf{s} predstavuje smerový vektor osi skrutky. Stúpanie skrutky (*pitch*):

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \quad (2)$$

je číselná charakteristika skrutky. Operácia „ \cdot “ predstavuje skalárny súčin vektorov.

V špeciálnom prípade, ak $h = 0$, takáto skrutka sa nazýva *priamkový vektor* alebo tiež *Plückerove súradnice priamky*. Duálny vektor \mathbf{s}^0 predstavuje moment priamky ku začiatku súradnicovej sústavy a je definovaný ako vektorový súčin smerového vektora \mathbf{s} priamky a polohového vektora \mathbf{r} ľubovoľného bodu priamky

$$\mathbf{s}^0 = \mathbf{r} \times \mathbf{s}. \quad (3)$$

Primárna a duálna časť priamkového vektora spĺňajú podmienku ortogonalitu

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^0 = 0. \quad (4)$$

Ak je stúpanie skrutky $h = \infty$, takúto skrutku nazývame *dvojica* (*couple*) a označujeme ju $\$ = (\mathbf{0}, \mathbf{s})$ za podmienky, že $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$. [11] Dvojica je teda skrutka s nekonečným stúpaním, ktorej os má daný smer, ale ľubovoľné umiestnenie v priestore.

1.2 Operácie so skrutkami

Na množine skrutiek máme definované nasledujúce operácie:

Nech $\$ = (\mathbf{s}, \mathbf{s}^0)$, $\$_1 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0)$, $\$_2 = (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0)$ sú ľubovoľné skrutky a nech $\lambda \in R$. Potom *Súčet skrutiek* [12]:

$$\begin{aligned} \$_1 + \$_2 &= (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0) + (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0) = \\ &= (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1^0 + \mathbf{s}_2^0). \end{aligned} \quad (5)$$

Násobenie skrutky skalárom [12]:

$$\lambda \$ = \lambda (\mathbf{s}, \mathbf{s}^0) = (\lambda \mathbf{s}, \lambda \mathbf{s}^0). \quad (6)$$

Výsledkom týchto operácií je opäť skrutka.

Okrem uvedených operácií definujeme pre skrutky ešte operáciu recipročného násobenia.

Nech $\$_1 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0)$, $\$_2 = (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0)$ sú ľubovoľné skrutky. Potom operáciu „ \circ “, definovanú ako:

$$\$_1 \circ \$_2 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0) \circ (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0) = \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2^0 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1^0, \quad (7)$$

nazývame recipročný súčin skrutiek [11]. Maticový tvar recipročného súčinu je:

$$\$_1 \circ \$_2 = \$_1 \Delta \$_2^T, \quad (8)$$

kde Δ je štvorcová matica rozmeru 6×6 v tvare:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Matica \mathbf{I} je jednotková matica a $\mathbf{0}$ je nulová matica, obidve s rozmerom 3×3 . Výsledkom recipročného súčinu dvoch skrutiek je skalár.

Dve skrutky $\$_1 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0)$, $\$_2 = (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0)$ sa nazývajú recipročné, ak platí:

$$\$_1 \circ \$_2 = 0. \quad (10)$$

Uvažujme skrutku $\$ = (l, m, n | p, q, r)$. Súradnice primárnej a duálnej časti recipročnej skrutky $\$^r = (\bar{l}, \bar{m}, \bar{n} | \bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ vypočítame zo vzťahu

$$p \cdot \bar{l} + q \cdot \bar{m} + r \cdot \bar{n} + l \cdot \bar{p} + m \cdot \bar{q} + n \cdot \bar{r} = 0. \quad (11)$$

Nakoľko máme šesť neznámych a len jednu rovnicu, bude existovať ∞^5 riešení. Má však zmysel uvažovať len lineárne nezávislé riešenia, čím sa počet zredukuje na päť skrutiek. Navyše pre recipročné skrutky platí, že sú to jednotkové skrutky, t. j. ich primárna časť je jednotkový vektor. Pre jednoduchšiu interpretáciu nájdených recipročných skrutiek sú známe podmienky reciprocity niektorých dvojíc skrutiek:

- dva priamkové vektory sú recipročné vtedy a len vtedy, ak ležia v jednej rovine,
- dve dvojice sú vždy recipročné,
- priamkový vektor a dvojica sú recipročné jedine vtedy, ak sú na seba kolmé [11].

1.3 Lineárna závislosť/nezávislosť skrutiek

Podobne ako v prípade vektorov môžu byť aj pre skrutky ako duálne vektory definované vzťahy lineárnej závislosti, resp. nezávislosti.

Hovoríme, že skrutky $\$_1(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0), \$_2 = (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0), \dots, \$_n = (\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n^0)$ sú *lineárne nezávislé*, ak:

$$c_1 \$_1 + c_2 \$_2 + \dots + c_n \$_n = c_1 (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1^0) + c_2 (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2^0) + \dots + c_n (\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_n^0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad (12)$$

práve vtedy, keď reálne koeficienty c_1, c_2, \dots, c_n sú všetky súčasne nulové. V opačnom prípade hovoríme, že skrutky sú *lineárne závislé*. Vzhľadom k tomu, že skrutka ako duálny vektor má šesť súradníc,

v trojrozmernom priestore existuje maximálne šesť lineárne nezávislých skrutiiek [11]. Pri riešení úlohy o lineárnej (ne)závislosti skrutiiek postupujeme rovnako ako pri riešení obdobnej úlohy pre vektory.

2 SCREW THEORY V MECHANIKE

Akúkoľvek zmenu polohy tuhého telesa v priestore je možné dosiahnuť rotáciou telesa okolo nejakej osi a následným posunutím v smere danej osi. Pri súbežnej realizácii týchto dvoch pohybov sa nejedná o nič iné ako o pohyb telesa po dráhe v tvare skrutkovice [13]. V tejto časti zadefinujeme pojem pohybovej a silovej skrutki, ktoré umožňujú prepojiť pojem skrutki z predchádzajúcej časti s pojmi rýchlosti, sily a momentu sily. Budeme sa tiež venovať jednotlivým väzbám telesa v priestore vyjadreným práve pomocou skrutiiek.

2.1 Pohybová skrutka

Uvažujme tuhé teleso, ktoré rotuje v priestore okolo osi danej smerovým vektorom \mathbf{s} uhlovou rýchlosťou ω . Ak vyjadríme os rotácie ako priamkový vektor, potom môžeme rotačný pohyb telesa popísať priamkovým vektorom uhlovej rýchlosti ako

$$\omega\$ = \omega(\mathbf{s}, \mathbf{s}^0) = (\omega, \omega\mathbf{s}^0). \quad (13)$$

Druhá zložka priamkového vektora (13):

$$\omega\mathbf{s}_0 = \omega(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = \mathbf{r} \times (\omega\mathbf{s}) = \mathbf{r} \times \omega = \mathbf{v}_0, \quad (14)$$

predstavuje relatívnu rýchlosť začiatku súradnicovej sústavy O vzhľadom k jej kolmému priemetu na os otáčania. Preto môžeme rotačný pohyb tuhého telesa vyjadriť jeho pohybovým stavom, resp. pohybovou skrutkou (*twist*) v tvare:

$$\omega\$ = (\omega, \mathbf{v}_0). \quad (15)$$

Ak os rotácie prechádza začiatkom súradnicovej sústavy, tvar pohybovej skrutki je $\omega\$ = (\omega, \mathbf{0})$, nakoľko polohový vektor \mathbf{r} je v tomto prípade nulový vektor [11].

Uvažujme teraz tuhé teleso, ktoré sa pohybuje posuvným pohybom s rýchlosťou v v smere vektora \mathbf{s} . Vektor okamžitej rýchlosti môžeme vyjadriť ako:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{s}. \quad (16)$$

Pri posuvnom pohybe každý bod tuhého telesa opisuje rovnakú trajektóriu. To znamená, že ak premiestnime v priestore vektor \mathbf{s} rovnobežne s jeho pôvodným umiestnením, vektor rýchlosti \mathbf{v} sa nezmení. V skrutkovom vyjadrení ide o dvojicu v tvare $\$ = (\mathbf{0}, \mathbf{s})$. Teda pohybový stav telesa pri posuvnom pohybe zapíšeme ako:

$$v\$ = v(\mathbf{0}, \mathbf{s}) = (\mathbf{0}, v). \quad (17)$$

Na posuvný pohyb je možné nazerať aj ako na rotačný pohyb okolo osi kolmej na \mathbf{s} , ktorá leží v nekonečne, čo opäť implikuje zápis skrutki v tvare dvojice [11].

Všeobecný pohyb môžeme zapísať ako súčet posuvného a rotačného pohybu. V skrutkovom

vyjadrení s využitím (13) a (17) môžeme pohybový stav telesa zapísať ako:

$$\omega\$ + v\$ = (\omega, \omega\mathbf{s}^0) + (\mathbf{0}, v\mathbf{s}) = (\omega, \omega\mathbf{s}^0 + v\mathbf{s}). \quad (18)$$

Stúpanie pohybovej skrutki:

$$h = \frac{v}{\omega} \quad (19)$$

je dané ako podiel posuvnej rýchlosti tuhého telesa pozdĺž osi skrutki a uhlovej rýchlosti telesa rotujúceho okolo osi skrutki [14].

2.2 Silová skrutka

Analogicky ako v prípade pohybovej skrutki môžeme aj silu a moment sily zjednotiť do spoločného zápisu použitím vhodnej skrutki.

Nech na teleso pôsobí sila f v smere vektora \mathbf{s} , potom vektor pôsobiacej sily môžeme zapísať ako $f\mathbf{s}$. Zároveň pôsobením sily f vzniká v telese moment sily \mathbf{M}_0 vzhľadom k začiatku súradnicovej sústavy, vyjadrený ako:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times f\mathbf{s} = f(\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = f\mathbf{s}^0. \quad (20)$$

Potom pôsobenie sily v smere vektora \mathbf{s} môžeme zapísať pomocou skrutki v tvare:

$$(f, \mathbf{M}_0) = (f\mathbf{s}, f\mathbf{s}^0) = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^0) = f\$. \quad (21)$$

Teraz uvažujme, že na tuhé teleso pôsobia dve rovnobežné, rovnako veľké, opačne orientované sily \mathbf{f}_1 a \mathbf{f}_2 . Účinkom týchto síl vzniká moment dvojice síl \mathbf{M} , ktorý pôsobí v smere vektora \mathbf{s} kolmo na rovinu pôsobiacich síl $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$. Pôsobenie dvojice síl môžeme v skrutkovom vyjadrení zapísať ako $M(\mathbf{0}, \mathbf{s})$.

Ak na tuhé teleso pôsobí sústava síl a momentov síl, môžeme to zapísať ako pôsobenie výslednej sily a výsledného momentu síl pomocou silovej skrutki (*wrench*) v tvare:

$$f\$ = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}^0) = (f, \mathbf{M}^0) = f(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0 + h_f\mathbf{s}), \quad (22)$$

kde h_f predstavuje stúpanie silovej skrutki, dané ako podiel momentu síl pôsobiacich v smere osi skrutki a výslednej pôsobiacej sily [14].

3 POHYBLIVOSŤ MECHANIZMU

Pohyblivosť telesa predstavuje počet nezávislých pohybov, ktoré môže teleso vykonať. Voľné teleso má v priestore šesť stupňov voľnosti. Vo väčšine prípadov je však teleso spojené s okolím geometrickými väzbami, ktoré jeho pohyblivosť znižujú v závislosti od druhu väzby. Pri uvoľňovaní väzby ju nahradzame reakčnou silou, resp. reakčným momentom síl v závislosti od toho, či odoberá translačné alebo rotačné stupne voľnosti.

Pre určenie pohyblivosti mechanizmu pomocou skrutiiek využívame recipročný súčin skrutiiek (7). Recipročný súčin silovej a pohybovej skrutki predstavuje okamžitú prácu v dôsledku sily

pôsobiacej na pohybujúce sa teleso. Väzbové sily (momenty síl) však pri svojom pôsobení na teleso neindukujú žiadnu prácu, t. j. recipročný súčin takejto skrutky s pohybovou skrutkou je nulový. Bez ohľadu na veľkosť takto pôsobiacej sily sa pohybový stav telesa nemení. Ak skrutka $\$$ určuje voľný pohyb telesa, potom recipročná skrutka $\r reprezentuje väzbu (silu alebo moment) vzhľadom na odobratý stupeň voľnosti. Naopak, ak $\$$ predstavuje väzbu, potom $\r reprezentuje pohyb, ktorý telesu väzba umožňuje [11].

Uvažujme teraz tuhé teleso, ktoré je spojené geometrickou väzbou s mechanizmom, pričom táto väzba telesa odoberá j stupňov voľnosti, $j < 6$. Množina všetkých lineárne nezávislých pohybových skrutiek popisujúcich pohyby, ktoré daná väzba telesu umožňuje, nazývame pohybový systém telesa S_m . Množinu všetkých lineárne nezávislých skrutiek, ktoré sú súčasne recipročné ku všetkým skrutkám pohybového systému S_m , nazývame recipročný silový systém S^R . Platí, že súčet voľných pohybov a väzieb je vždy šesť, preto:

$$\dim(S_m) + \dim(S^R) = 6. \quad (23)$$

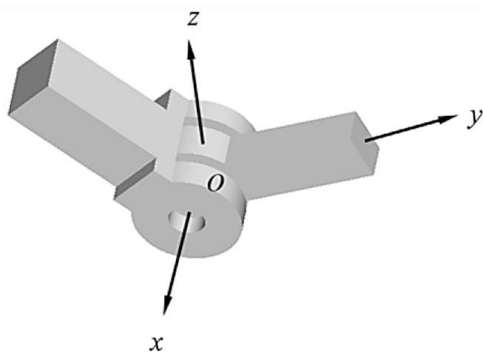
Ku každému recipročnému silovému systému S^R vieme priradiť väzbový pohybový systém S_m^C , ktorý obsahuje v skrutkovom vyjadrení pohyby obmedzené danou geometrickou väzbou. Pre väzbové pohybové skrutky viazané na väzbové silové skrutky platí: ak silová skrutka je $\$^r = (\mathbf{s}, \mathbf{s}_0 + h\mathbf{s})$, potom pohybová skrutka, vyjadrujúca pohyb obmedzený väzbou $\r , je daná ako [14]:

$$\$^C_m = \left(\mathbf{s}, \mathbf{s}_0 + \frac{1}{h}\mathbf{s} \right). \quad (24)$$

V nasledujúcej časti si popíšeme jednotlivé typy väzieb telies v priestore pomocou pohybových skrutiek a väzieb, ktorú sú vo forme k nim recipročných skrutiek. Pre jednoduchosť uvedieme len väzby s jedným stupňom voľnosti.

3.1 Rotačná väzba

Uvažujme dva členy spojené rotačnou väzbou. Pravouhlú súradnicovú sústavu zadefinujeme podľa obr. 1.



Obr. 1. Súradnicová sústava definovaná pre rotačnú väzbu [14]

Os x zodpovedá osi kľbu. Potom pohybová skrutka vyjadrujúca voľný pohyb je daná:

$$\$ = (1, 0, 0 | 0, 0, 0). \quad (25)$$

Väzby dané ako recipročné silové skrutky tvoria recipročný systém obsahujúci päť skrutiek v tvare:

$$\begin{aligned} \$^r_1 &= (1, 0, 0 | 0, 0, 0), \\ \$^r_2 &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\ \$^r_3 &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0), \\ \$^r_4 &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\ \$^r_5 &= (1, 0, 0 | 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (26)$$

$\r_1 predstavuje silu pôsobiacu v smere osi x , $\r_2 predstavuje silu pôsobiacu v smere osi y , $\r_3 predstavuje silu pôsobiacu v smere osi z , $\r_4 predstavuje moment sily vzhľadom k osi y a $\r_5 predstavuje moment sily vzhľadom k osi z .

Pohybové skrutky prislúchajúce k silovým väzbovým skrutkám sú:

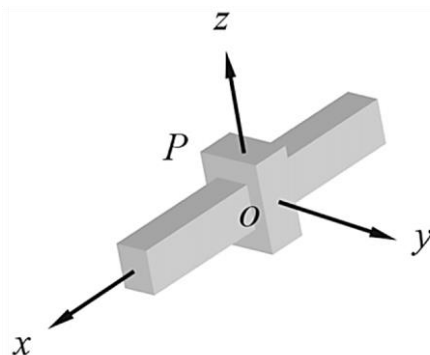
$$\begin{aligned} \$^C_{m1} &= (0, 0, 0 | 1, 0, 0), \\ \$^C_{m2} &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\ \$^C_{m3} &= (0, 0, 0 | 0, 0, 1), \\ \$^C_{m4} &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\ \$^C_{m5} &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0). \end{aligned} \quad (27)$$

$\$^C_{m1}$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi x , $\$^C_{m2}$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi y , $\$^C_{m3}$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi z , $\$^C_{m4}$ predstavuje otočenie okolo osi y a $\$^C_{m5}$ predstavuje otočenie okolo osi z [14].

3.2 Posuvná väzba

Uvažujme dva členy spojené posuvnou väzbou. Pravouhlú súradnicovú sústavu zadefinujeme podľa obr. 2. Smer posunu je definovaný v smere osi x . Potom pohybová skrutka vyjadrujúca voľný pohyb je daná

$$\$ = (0, 0, 0 | 1, 0, 0). \quad (28)$$



Obr. 2. Súradnicová sústava definovaná pre posuvnú väzbu [14]

Väzby dané ako recipročné silové skrutky tvoria recipročný systém obsahujúci päť skrutiek v tvare:

$$\begin{aligned}
\$1^r &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\
\$2^r &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0), \\
\$3^r &= (0, 0, 0 | 1, 0, 0), \\
\$4^r &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\
\$5^r &= (1, 0, 0 | 0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{29}$$

$\$1^r$ predstavuje silu v smere osi y , $\$2^r$ predstavuje silu v smere osi z , $\$3^r$ predstavuje moment sily vzhľadom k osi x , $\$4^r$ predstavuje moment sily vzhľadom k osi y a $\$5^r$ predstavuje moment sily vzhľadom k osi z .

Pohybové skrutky prislúchajúce k silovým väzbovým skrutkám sú:

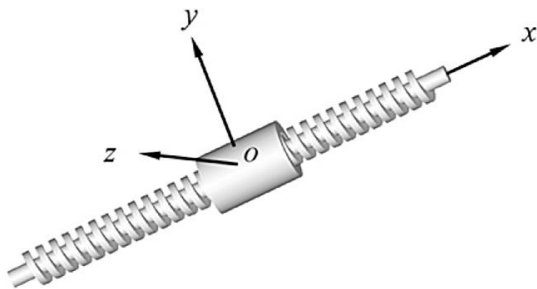
$$\begin{aligned}
\$m1^c &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\
\$m2^c &= (0, 0, 0 | 0, 0, 1), \\
\$m3^c &= (1, 0, 0 | 0, 0, 0), \\
\$m4^c &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\
\$m5^c &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0).
\end{aligned} \tag{30}$$

$\$m1^c$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi y , $\$m2^c$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi z , $\$m3^c$ predstavuje otočenie okolo osi x , $\$m4^c$ predstavuje otočenie okolo osi y a $\$m5^c$ predstavuje otočenie okolo osi z [14].

3.3 Skrutková väzba

Uvažujme dva členy spojené skrutkovou väzbou so stúpaním h skrutky. Pravouhlú súradnicovú sústavu zadefinujeme podľa obr. 3. Os x zodpovedá osi skrutky. Potom pohybová skrutka vyjadrujúca voľný pohyb je daná:

$$\$ = (1, 0, 0 | h, 0, 0). \tag{31}$$



Obr. 3. Súradnicová sústava definovaná pre skrutkovú väzbu [14]

Väzby dané ako recipročné silové skrutky tvoria recipročný systém obsahujúci päť skrutiek v tvare:

$$\begin{aligned}
\$1^r &= (1, 0, 0 | -h, 0, 0), \\
\$2^r &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\
\$3^r &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0), \\
\$4^r &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\
\$5^r &= (1, 0, 0 | 0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{32}$$

$\$1^r$ predstavuje silovú skrutku so stúpaním $-h$ v smere osi x , $\$2^r$ predstavuje silu v smere osi y , $\$3^r$ predstavuje silu v smere osi z , $\$4^r$ predstavuje moment sily vzhľadom k osi y a $\$5^r$ predstavuje moment sily vzhľadom k osi z .

Pohybové skrutky prislúchajúce k silovým väzbovým skrutkám sú:

$$\begin{aligned}
\$m1^c &= \left(1, 0, 0 | 0, -\frac{1}{h}, 0\right), \\
\$m2^c &= (0, 0, 0 | 0, 1, 0), \\
\$m3^c &= (0, 0, 0 | 0, 0, 1), \\
\$m4^c &= (0, 1, 0 | 0, 0, 0), \\
\$m5^c &= (0, 0, 1 | 0, 0, 0).
\end{aligned} \tag{33}$$

$\$m1^c$ predstavuje skrutkový pohyb v smere osi x , $\$m2^c$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi y , $\$m3^c$ predstavuje posuvný pohyb v smere osi z , $\$m4^c$ predstavuje otočenie okolo osi y a $\$m5^c$ predstavuje otočenie okolo osi z [14].

3.4 Určenie pohyblivosti mechanizmu

Pri určení pohyblivosti prostredníctvom *Screw theory* formulujeme väzbové rovnice. Uvažujme sériový kinematický reťazec tvorený h kinematickými dvojicami. Ako uvádzajú Amine et al. [15], pohybový systém sériového kinematického reťazca je daný ako zjednotenie pohybových skrutiek kinematických dvojíc:

$$S_m = \cup_{i=1}^h \$i, \tag{34}$$

väzbový silový systém je naopak daný ako prienik väzbových skrutiek $\$i^r$:

$$S^R = \cap_{i=1}^h \$i^r. \tag{35}$$

Pohybový systém paralelného kinematického reťazca, ktorý je tvorený sériovými vodiacími reťazcami, je daný ako prienik pohybových systémov vodiacich reťazcov:

$$S_m = \cap_{i=1}^g S_{mi}, \tag{36}$$

väzbový silový systém je daný ako zjednotenie väzbových systémov S_i^R :

$$S^R = \cup_{i=1}^h S_i^R. \tag{37}$$

Zjednotenie skrutiek určíme len ako zjednotenie množiny prvkov s vylúčením lineárne závislých skrutiek, prienik množiny skrutiek už je komplikovanejší. Preto pri určení pohyblivosti paralelného mechanizmu postupujeme tak, že každej kinematickej dvojici v sériovom reťazci priradíme pohybovú skrutku. Určíme pohybový systém sériového reťazca ako zjednotenie týchto kĺbových skrutiek (34). Nájdeť väzbový silový systém reťazca ako riešenie recipročnej úlohy k pohybovému systému (11). Postup zopakujeme pre všetky sériové vodiace reťazce paralelného mechanizmu. Určíme väzbový silový systém mechanizmu ako zjednotenie

väzbových silových systémov jednotlivých reťazcov (37). Pohybový systém mechanizmu potom získame ako riešenie recipročnej úlohy (11) k väzbovému silovému systému mechanizmu.

4 KINEMATICKÁ ANALÝZA

Neoddeliteľnou súčasťou analýzy mechanizmu je jeho kinematický model, ktorý je nevyhnutný jednak pre riešenie jeho dynamickej stránky, ako aj pre jeho riadenie a simuláciu. Úlohou kinematickej analýzy je zadefinovať priebeh polohy a orientácie koncového efektora v čase, jeho rýchlosť a zrýchlenie, prípadne ďalšie vyššie derivácie polohy.

V rámci kinematiky rozlišujeme štyri základné úlohy:

- priama úloha pre polohu,
- inverzná úloha pre polohu,
- priama úloha pre rýchlosti,
- inverzná úloha pre rýchlosti.

Pri priamej úlohe pre polohy je potrebné na základe znalosti vzájomnej polohy (tzv. kĺbových premenných) členov robota určiť polohu koncového efektora. Vzájomná poloha členov sériového robota je určená ich vzdialenosťami a uhlami ich osí; v prípade paralelných robotov sú to dĺžky členov ich ramien, respektíve vzájomné usporiadanie ramien. Inverzná úloha postupuje opačne: zo známej polohy a orientácie koncového efektora máme určiť topológiu jednotlivých členov mechanizmu. Analogicky, priama úloha pre rýchlosti znamená určiť rýchlosť koncového efektora pre známe hodnoty relatívnych rýchlostí jednotlivých členov mechanizmu. Pri inverznej úlohe naopak hľadáme rýchlosti členov mechanizmu za podmienky, že poznáme rýchlosť koncového efektora. Priama a inverzná úloha pre rýchlosti sa môže javiť ako zbytočná, pretože rýchlosti môžeme získať ako derivácie polohy, t. j. derivovaním úlohy pre polohy. Na rozdiel od úlohy pre polohy sú však úlohy pre rýchlosti omnoho jednoduchšie riešiteľné [16].

4.1 Úloha pre rýchlosti

Uvažujme otvorený kinematický reťazec tvorený členmi označenými $j, j + 1, j + 2, \dots, m - 2, m - 1, m$, ktoré sú navzájom spojené skrutkovými väzby, kde ${}^k\$\$^{k+1}$ vyjadruje skrutkovú väzbu medzi členmi k a $k + 1$. Potom rýchlosť člena m vzhľadom na člen j vypočítame ako:

$${}^j\mathbf{V}^m = \omega_{j,j+1} {}^j\$\$^{j+1} + \omega_{j+1,j+2} {}^{j+1}\$\$^{j+2} + \dots + \omega_{m-1,m} {}^{m-1}\$\$^m. \quad (38)$$

Ak stotožníme j -tý člen s bázou sériového robota a m -tý člen s jeho koncovým efektorom, dostávame rovnicu pre výpočet relatívnej rýchlosti koncového efektora v skrutkovom tvare [12]. Zároveň sme

získali riešenie priamej úlohy pre rýchlosti v sériovom mechanizme. Výslednú rýchlosť koncového efektora potom určíme na základe jednej polohy robota (vektorov osí rotačných väzieb a smerov posunutia translačných väzieb) a znalosti relatívnych rýchlostí jeho členov [16]. Po zápise rovnice (38) v maticovom tvare:

$$\left({}^0\mathbf{V}^n \right)^T = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad (39)$$

kde:

$$\mathbf{J} = \left(\left({}^0\$\$^1 \right)^T \quad \left({}^1\$\$^2 \right)^T \quad \dots \quad \left({}^{n-1}\$\$^n \right)^T \right) \quad (40)$$

je Jacobiho matica (jakobián) a:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\omega_{0,1} \quad \omega_{1,2} \quad \omega_{2,3} \quad \dots \quad \omega_{n-1,n} \right)^T \quad (41)$$

je vektor relatívnych rýchlostí, môžeme nájsť aj riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti. Rovnicu (39) vynásobíme zľava inverznou maticou \mathbf{J}^{-1} , čím získame vyjadrenie vektora relatívnych rýchlostí (41) v tvare:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{J}^{-1} \left({}^0\mathbf{V}^n \right)^T. \quad (42)$$

V prípade paralelného mechanizmu musí platiť, že relatívna rýchlosť pohyblivej platformy, ktorá teraz reprezentuje koncový efektor, musí byť rovnaká, nech ju spočítame podľa (39) cez ktorýkoľvek jej vodiaci reťazec. Problematickým sa ale javí skutočnosť, že nie všetky kinematické dvojice v paralelnom mechanizme sú riadené. Pasívne kinematické dvojice v rovnici (39) eliminujeme tak, že rovnicu vynásobíme skrutkou súčasne recipročnou k všetkým skrutkám pasívnych dvojíc. Tento postup zopakujeme pre všetky vodiace reťazce, vďaka čomu dostávame sústavu rovníc, ktorej maticový tvar je:

$$\mathbf{A} \Delta \mathbf{V}^P = \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}_a, \quad (43)$$

kde:

$$\mathbf{A} = \left[\$\$_1^R \quad \$\$_2^R \quad \$\$_3^R \quad \$\$_4^R \quad \$\$_5^R \quad \$\$_6^R \right] \quad (44)$$

je matica recipročných skrutiek ku skrutkám pasívnych kĺbov v jednotlivých vodiacich reťazcoch, Δ je operátor polaroty definovaný v (9):

$$\mathbf{B} = \text{diag} \left[\$\$_1^R \circ \$\$_{a_1}, \$\$_2^R \circ \$\$_{a_2}, \$\$_3^R \circ \$\$_{a_3}, \$\$_4^R \circ \$\$_{a_4}, \$\$_5^R \circ \$\$_{a_5}, \$\$_6^R \circ \$\$_{a_6} \right] \quad (45)$$

je diagonálna matica koeficientov a:

$$\boldsymbol{\Omega}_a = \left[\omega_{a_1}, \omega_{a_2}, \omega_{a_3}, \omega_{a_4}, \omega_{a_5}, \omega_{a_6} \right]^T \quad (46)$$

je vektor relatívnych rýchlostí aktívnych kinematických dvojíc jednotlivých vodiacich reťazcov (vyjadrenia (44), (45), (46) sú zapísané pre paralelný mechanizmus so 6 aktuátormi). [3, 12, 17] Ak má matica $\mathbf{A} \Delta$ inverznú maticu, po vynásobení rovnice (43) inverznou maticou $(\mathbf{A} \Delta)^{-1}$ dostávame riešenie priamej úlohy pre rýchlosti. Ak existuje inverzná matica k matici \mathbf{B} , po vynásobení rovnice (43) maticou \mathbf{B}^{-1} dostávame riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti.

4.2 Singularity

Neoddeliteľnou súčasťou kinematickej analýzy je určenie, tzv. singulárnych polôh. Robot sa nachádza v singulárnej polohe, ak koncový efektor stráca jeden alebo viac stupňov voľnosti [18]. Singularity v sériovom mechanizme určujeme prostredníctvom *Jacobihho matice* (40) z rovnice rýchlosti (39). Robot je v singulárnej polohe, keď sa zníži hodnosť Jacobihho matice, t. j.:

$$\det(\mathbf{J}) = 0, \quad (47)$$

respektíve:

$$\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) = 0 \quad (48)$$

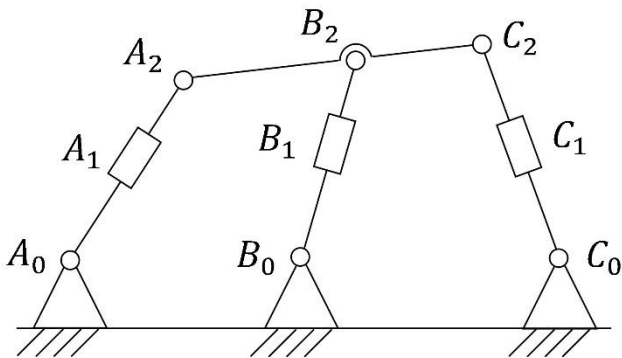
v prípade, že matica \mathbf{J} nie je štvorcová.

Pre paralelné mechanizmy určujeme singulárne polohy z rovnice (43). Rozlišujeme tri typy singularít, a to

- singularity 1. druhu - matica \mathbf{B} je singulárna,
- singularity 2. druhu - matica $\mathbf{A}\mathbf{\Delta}$ je singulárna,
- singularity 3. druhu - obe matice $\mathbf{A}\mathbf{\Delta}$ a \mathbf{B} sú singulárne [3, 12].

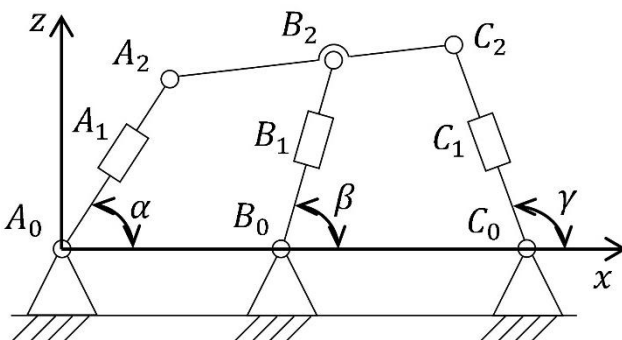
5 KINEMATICKÁ ANALÝZA VYBRANÉHO PARALELNÉHO MECHANIZMU

Uvažujme planárny paralelný mechanizmus, kde pohyblivá platforma je ku báze pripojená tromi vodiacimi reťazcami typu *RTR* (obr. 4).



Obr. 4. Planárny paralelný mechanizmus

Určíme pohyblivosť mobilnej platformy. Umiestnenie súradnicovej sústavy je na obr. 5.



Obr. 5. Súradnicová sústava pre planárny mechanizmus

Os y je kolmá na rovinu xz , orientovaná v zmysle pravidla pravej ruky. Dĺžky jednotlivých členov sú:

$$\begin{aligned} |A_0A_1| &= L_1 & |A_0A_2| &= L_2 & |A_0B_0| &= L_3 \\ |B_0B_1| &= L_4 & |B_0B_2| &= L_5 & |B_0C_0| &= L_6 \\ |C_0C_1| &= L_7 & |C_0C_2| &= L_8. \end{aligned} \quad (49)$$

Uhly, ktoré zvierajú jednotlivé vodiace reťazce, sú vyznačené na obr. 5.

Pohyblivosť mobilnej platformy $A_2B_2C_2$ určíme ako prienik pohyblivosti vodiacich reťazcov. Jednotlivým väzbám priradíme pohybové skrutky podľa typu väzby.

Reťazec $A_0A_1A_2$:

$$\begin{aligned} \$_{A_0} &= (0 \ 1 \ 0 | 0 \ 0 \ 0), \\ \$_{A_1} &= (0 \ 0 \ 0 | L_1 \cos \alpha, 0, L_1 \sin \alpha), \\ \$_{A_2} &= (0 \ 1 \ 0 | -L_2 \sin \alpha, 0, L_2 \cos \alpha). \end{aligned} \quad (50)$$

Reťazec $B_0B_1B_2$:

$$\begin{aligned} \$_{B_0} &= (0 \ 1 \ 0 | 0 \ 0 \ L_3), \\ \$_{B_1} &= (0 \ 0 \ 0 | L_4 \cos \beta, 0, L_4 \sin \beta), \\ \$_{B_2} &= (0 \ 1 \ 0 | -L_5 \sin \beta, 0, L_3 + L_5 \cos \beta). \end{aligned} \quad (51)$$

Reťazec $C_0C_1C_2$:

$$\begin{aligned} \$_{C_0} &= (0 \ 1 \ 0 | 0, 0, L_3 + L_6), \\ \$_{C_1} &= (0 \ 0 \ 0 | L_7 \cos \gamma, 0, L_7 \sin \gamma), \\ \$_{C_2} &= (0 \ 1 \ 0 | -L_8 \sin \beta, 0, L_3 + L_6 + L_8 \cos \gamma). \end{aligned} \quad (52)$$

Použitím rovnice (11) nájdeme recipročné skrutky ku skrutkám jednotlivých vodiacich reťazcov. Vo všetkých troch vodiacich reťazcoch je riešením parametrická skrutka v tvare

$$\$^r = (0 \ u \ 0 | v \ 0 \ w), \quad u, v, w \in \mathbb{R} \quad (53)$$

Po rozdelení riešenia (53) na súčet skrutiek pre jednotlivé parametre dostávame väzbový silový systém vodiacich reťazcov:

$$\begin{aligned} \$_1 &= (0 \ 1 \ 0 | 0 \ 0 \ 0), \\ \$_2 &= (0 \ 0 \ 0 | 1 \ 0 \ 0), \\ \$_3 &= (0 \ 0 \ 0 | 0 \ 0 \ 1). \end{aligned} \quad (54)$$

Tento väzbový silový systém (54) je rovnaký pre všetky tri vodiace reťazce, preto väzbový silový systém mechanizmu, ktorý je zjednotením týchto väzbových silových systémov, je tiež v tvare (54). Pohybový systém mechanizmu nájdeme opäť vyriešením rovnice (11) ako množinu recipročných skrutiek k väzbovému silovému systému (54). Pohybový systém mechanizmu obsahuje 3 skrutky:

$$\begin{aligned} \$_1^m &= (0 \ 1 \ 0 | 0 \ 0 \ 0), \\ \$_2^m &= (0 \ 0 \ 0 | 1 \ 0 \ 0), \\ \$_3^m &= (0 \ 0 \ 0 | 0 \ 0 \ 1), \end{aligned} \quad (55)$$

mechanizmus má teda 3 stupne voľnosti. Skrutka $\$_1^m$ určuje rotáciu okolo osi y , skrutka $\$_2^m$ určuje posuv v smere osi x a skrutka $\$_3^m$ určuje posuv v smere osi z .

Pohybovému stavu mobilnej platformy zodpovedá pohybová skrutka:

$$\$_m = (0, \omega_y, 0 | v_x, 0, v_z). \quad (56)$$

Rovnice pre rýchlosti vodiacich reťazcov (38) sú potom v tvare:

$$\begin{aligned} (0, \omega_y, 0 | v_x, 0, v_z) &= \omega_{A_0} \$_{A_0} + v_{A_1} \$_{A_1} + \omega_{A_2} \$_{A_2}, \\ (0, \omega_y, 0 | v_x, 0, v_z) &= \omega_{B_0} \$_{B_0} + v_{B_1} \$_{B_1} + \omega_{B_2} \$_{B_2}, \\ (0, \omega_y, 0 | v_x, 0, v_z) &= \omega_{C_0} \$_{C_0} + v_{C_1} \$_{C_1} + \omega_{C_2} \$_{C_2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Tri stupne voľnosti znamenajú, že v mechanizme sú tri riadené kinematické dvojice. Predpokladajme, že v každom reťazci je riadená jedna kinematická dvojica, a to:

- v reťazci $A_0A_1A_2$ je to posuvná väzba A_1 ,
- v reťazci $B_0B_1B_2$ je to rotačná väzba B_0 ,
- v reťazci $C_0C_1C_2$ je to posuvná väzba C_1 .

Po vynásobení rovníc (57) recipročnými skrutkami ku pasívnym väzbám v jednotlivých rovniciach dostávame rovnicu (43) v tvare:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ L_5 + L_3 \cos \beta & \sin \beta & -\cos \beta \\ -(L_3 + L_6) \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_y \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_5 & 0 \\ 0 & 0 & L_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{A_1} \\ \omega_{B_0} \\ v_{C_1} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Z rovnice (58) vynásobením inverznou maticou k matici koeficientov na ľavej strane získame rýchlosť mobilnej platformy pre danú konfiguráciu a okamžité rýchlosti riadených členov. Po vynásobení rovnice (58) inverznou maticou k matici koeficientov na pravej strane dostaneme riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti, t. j. rýchlosti riadených kinematických dvojíc, ak poznáme okamžitú rýchlosť mobilnej platformy pri danej konfigurácii.

Z rovnice (58) môžeme určiť taktiež singulárne polohy mechanizmu. Mechanizmus má singularitu 1. druhu, ak:

$$\begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_5 & 0 \\ 0 & 0 & L_7 \end{vmatrix} = 0. \quad (59)$$

Keďže dĺžky $L_1, L_5, L_7 \neq 0$, mechanizmus nikdy nedosiahne singulárnu polohu 1. druhu, t. j. pohyblivá platforma sa nebude pohybovať, aj keď budú pohony zabrzdnené. Mechanizmus má singularitu 2. druhu, ak

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ L_5 + L_3 \cos \beta & \sin \beta & -\cos \beta \\ -(L_3 + L_6) \sin \gamma & \cos \gamma & \sin \gamma \end{vmatrix} = 0, \quad (60)$$

respektíve:

$$\begin{aligned} L_5 \sin(\alpha - \gamma) + L_6 \sin \gamma \cos(\beta - \alpha) + \\ + L_3 \sin \alpha \cos(\beta - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Dosiahnutie singularitu 2. druhu by vyžadovalo také natočenie vodiacich reťazcov, pri ktorom by rovnica (61) bola splnená.

ZÁVER

V článku sme prehľadným spôsobom zosumarizovali základné matematické pojmy z oblasti Screw theory. Ukázali sme prepojenie tohto matematického aparátu s mechanikou a uviedli sme algoritmy na riešenie pohyblivosti a úloh pre rýchlosti paralelných mechanizmov. Následne sme tieto poznatky aplikovali pri riešení kinematickej analýzy planárneho paralelného mechanizmu s tromi vodiacimi reťazcami typu RTR. Určili sme počet stupňov voľnosti a im zodpovedajúce pohyby mobilnej platformy. Našli sme vstupno-výstupný tvar rovnice pre rýchlosti a podmienky, za akých dosiahne mechanizmus singulárnu polohu aj vo vnútri svojho pracovného priestoru.

Pod'akovanie

Táto práca bola vytvorená v rámci projektu KEGA 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov pre zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni štúdia na technických VŠ.

LITERATÚRA

- [1] DIMENTBERG, F. M. (1965): *Vintovoye Ischisleniye i yego Prilozheniya v Mekhanike*. Moskva, Nauka, 199 s.
- [2] FANG, Y. - HUANG, Z. (1998): *Analytical identification of the principal screws of the third order screw system*. In: *Mechanism and Machine Theory*, 33(7), pp. 987-992.
- [3] ZLATANOV, D. - FENTON, R. G. - BENHABIB, B. (1994): *Singularity analysis of mechanisms and robots via a velocity-equation model of the instantaneous kinematics*. In: *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2. s. 980-985.
- [4] SARIYILDIZ, E. - CAKIRAY, E. - TEMELTAS, H. (2011): *A comparative study of three inverse kinematic methods of serial industrial robot manipulators in the screw theory framework*. In: *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 8(5), pp. 9-24.
- [5] MARTINEZ, J. M. R. - DUFFY, J. (1996): *An application of screw algebra to the acceleration analysis of serial chains*. In: *Mechanism and Machine Theory*, 31(4), pp. 445-457.
- [6] SZÜCS, L. - GALAMBOS, P. - DREXLER, D. A. (2021): *Kinematics of Delta-type Parallel Robot Mechanisms via Screw Theory: A tutorial paper*. In: *IEEE 19th World Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*, pp. 293-298.
- [7] BONEV, I. A. - ZLATANOV, D. - GOSSELIN, C. (2003): *Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory*. In: *Journal of Mechanical Design*, 125(3), pp. 573-581.

- [8] YU, J. - DAI, J. S. - ZHAO, T. - BI, S. - ZONG, G. (2009): *Mobility analysis of complex joints by means of screw theory*. In: *Robotica*, 27, pp. 915-927.
- [9] MASOULEH, M. T. - GOSSELIN, C. - SAADATZI, M. H. - TAGHIRAD, H. D. (2010): *Forward kinematic problem and constant orientation workspace of 5-RPRRR (3T2R)parallel mechanisms*. In: *Proceeding of ICEE 2010, Isfahan University of Technology*, 11-13 May 2010, pp. 668-673.
- [10] GALLARDO-ALVARADO, J. (2005): *Kinematics of a Hybrid Manipulator by Means of Screw Theory*. In: *Multibody System Dynamics*, 14, pp. 345-366.
- [11] HUANG, Z. - LI, Q. - DING, H. (2013): *Theory of Parallel Mechanisms*. Dordrecht, Springer, 421 s. ISBN 978-94-007-4201-7
- [12] GALLARDO-ALVARADO, J. (2016): *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Dordrecht, Springer, 377 s. ISBN 978-3-319-31124-1
- [13] LYNCH, K. M. - PARK, F. C. (2017): *Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control*. Cambridge, Cambridge University Press, 544 s. ISBN 978-1107156302
- [14] ZHAO, J. et al. (2014): *Advanced Theory of Constraint and Motion Analysis for Robot Mechanisms*. Oxford, Academic Press, 496 s. ISBN 978-0-12-420223-8
- [15] AMINE, S. et al. (2011): *Constraint and Singularity Analysis of Lower-Mobility Parallel Manipulators with Parallelogram Joints*. In: *Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2010. 34th Annual Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. Montreal, Quebec, 2*, pp. 1317-1326.
- [16] KARGER, A. - KARGEROVÁ, M. (2000): *Základy robotiky a prostorové kinematiky*. Praha, ČVUT, 265 s. ISBN 80-01-02183-1.
- [17] BONEV, I. A. - ZLATANOV, D. - GOSSELIN, C. (2003): *Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory*. In: *Journal of Mechanical Design*, 125(3). pp. 573-581.
- [18] JAZAR, R. N. 2010. *Theory of Applied Robotics. Kinematics, Dynamics, and Control*. 2. vydanie. New York, Springer, 888 s. ISBN 978-1-4419-1749-2.