
Porovnanie optimalizačných algoritmov pri spektrálnom ladení mechanickej sústavy

Jaroslav Majko, Ing., PhD.

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: jaroslav.majko@fstroj.uniza.sk

Lucia Deganová, Ing.

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: lucia.deganova@fstroj.uniza.sk

Ondrej Piroh, Ing.

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: ondrej.piroh@fstroj.uniza.sk

Ján Minárik, Ing.*

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: jan.minarik@fstroj.uniza.sk

Comparison of optimisation algorithms during the spectral tuning of a mechanical system

Abstract: This article deals with a comparison of various, gradient-based optimisation algorithms in terms of their accuracy and effectivity. The compared algorithms are the *steepest descent method (SDM)* and the most well-know *quasi-Newton* methods. The presented methods were applied to the spectral tuning of a simple two degree of freedom (*DOF*) mechanism, in order to evaluate their performance. The obtained results were statistically processed and utilised to compare the algorithms, based on their accuracy and overall effectivity. The results show that the quasi-Newton methods are superior to the *SDM* in terms of both the accuracy and computing time. Moreover, the overall performance of these methods is also significantly less influenced by the selection of starting point. Thus, the obtained results render the quasi-Newton methods as a significantly better choice, compared to the standard *SDM*.

Keywords: optimisation, *quasi-Newton* methods, natural frequencies, *Matlab*.

ÚVOD

Stroje a zariadenia sú počas prevádzky vystavené zaťaženiám, ktoré môžu vzniknúť buď v dôsledku chodu zariadenia alebo môžu predstavovať vplyvy okolia. Tieto zaťaženia môžu mať navyše aj stochastický charakter. Najmä pri dynamickom zaťažení je kľúčové poznať charakter pôsobiacich síl, keďže zásadným spôsobom ovplyvňujú funkciu zariadení. Významným parametrom sú práve frekvencie zaťaženia, ktoré vo veľkej miere ovplyvňujú prevádzku, životnosť a spoľahlivosť

strojov a konštrukcií. Z hľadiska vlastných frekvencií je mimoriadne nebezpečný stav rezonancie, keď sú budiace frekvencie príliš blízke vlastnej frekvencii stroja, čo môže v extrémnych prípadoch viesť až k úplnej deštrukcii zariadenia. Z tohto dôvodu je preto dôležité vhodné nastavenie parametrov konštrukcie tak, aby jej vlastné frekvencie neinterferovali s frekvenciami budiacich síl [1, 2].

Jednou z možných metód, ako modifikovať vlastné frekvencie sústavy je použitie optimalizačných algoritmov. Pomocou procesu optimalizácie je možné

nastaviť parametre systému tak, aby sa jeho vlastné frekvencie v dostatočnej miere približovali tým požadovaným [3]. V prípade inžinierskych aplikácií je jedným z najčastejšie využívaných algoritmov modifikovaný Simplex, známy tiež ako algoritmus *Nelder-Mead*. Jedná sa o pomerne jednoduchý, efektívny a robustný algoritmus, schopný nájsť lokálne minimum cieľovej funkcie. Existuje tiež skupina algoritmov využívajúcich hlbšie matematické základy. Tieto algoritmy sú založené na výpočte, resp. aproximáciách gradientu cieľovej funkcie. Cieľová funkcia predstavuje matematický popis riešenej úlohy, pričom bod, v ktorom táto funkcia nadobúda minimum zodpovedá optimálnemu stavu, ktorého dosiahnutie je predmetom optimalizácie. Medzi základné prístupy tu patrí napr. metóda najväčšieho spádu (*SDM*), ktorá využíva numerický výpočet gradientu v príslušnom bode cieľovej funkcie, v ktorého smere je následne hľadané nové lokálne minimum. Avšak, v komplexných aplikáciách, ako napríklad *metóda konečných prvkov (MKP)*, môže byť výpočet gradientu veľmi neefektívny, pričom navyše môžu mať tieto algoritmy problém s konvergenciou, keďže presnosť smeru určeného gradientom je obmedzená len na blízke okolie derivovaného bodu [2].

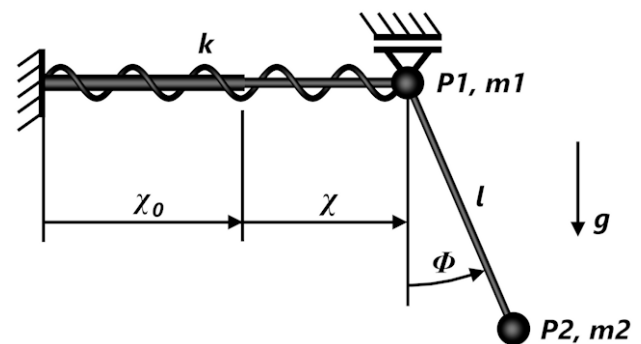
Za účelom urýchlenia konvergenzie bola postupne vyvinutá skupina modifikovaných algoritmov, ktoré sú známe aj ako quasi-Newtonove metódy. Medzi tie najznámejšie patria algoritmy *Davidon-Fletcher-Powell (DFP)* a *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)*. Tieto metódy predstavujú modifikáciu *SDM*, ktorá využíva aproximácie inverzie *Hessovej matice (Hessiánu)*, t.j. matice druhých parciálnych derivácií cieľovej funkcie, ktorá je počítaná v každom iteračnom kroku. Inverzia Hessiánu potom slúži na spresnenie smeru vypočítaného gradientu. Tento prístup spravidla vedie k výraznému urýchleniu konvergenzie [2, 4, 5].

Táto práca sa zaoberá porovnaním efektivity metódy *SDM* a *quasi-Newtonových* algoritmov, špecificky metód *DFP* a *BFGS*. Tieto algoritmy boli aplikované pri optimalizácii vlastných frekvencií jednoduchého mechanizmu s dvoma stupňami voľnosti ($^{\circ}V$), ktorý bol modelovaný ako sústava hmotných bodov. Cieľom optimalizácie bolo dosiahnuť požadované vlastné frekvencie mechanizmu, s ohľadom na obmedzujúce podmienky kladené na optimalizačné premenné. Týmito premennými sú materiálovo-geometrické charakteristiky vybraných komponentov mechanizmu. V prípade všetkých použitých metód bola optimalizácia vykonaná opakovane, zo súboru náhodne generovaných štartovacích bodov, ktoré boli spoločné pre všetky algoritmy. Jednotlivé optimalizačné algoritmy boli naprogramované

a testované v programe *Matlab*. Získané výsledky boli následne štatisticky spracované a využité pre porovnanie uvedených algoritmov.

1 POPIS RIEŠENÉHO PROBLÉMU

Riešený mechanizmus pozostáva z kyvadla, ktoré je uchytené na horizontálnom oscilátore (obr. 1). Systém je modelovaný ako sústava dvoch hmotných bodov (P_1, P_2), s dvoma *DOF*. Jeho polohu je teda možné popísať pomocou dvoch zovšeobecnených súradníc, ktoré zodpovedajú posunutiu oscilátora χ a výchylke kyvadla ϕ . V tu uvedenom prípade uvažujeme len s malými hodnotami zovšeobecnených súradníc. Systém teda môžeme považovať za geometricky lineárny. Vlastné frekvencie sústavy sú ovplyvnené hmotnosťami bodov ($m_1 = 1,25 \text{ kg}$, $m_2 = 2,25 \text{ kg}$), tuhosťou pružiny k a dĺžkou kyvadla l . Posledné dva parametre slúžia ako optimalizačné premenné, ktorých hodnoty môžu byť volené výhradne z intervalov $k \in \langle 40; 260 \rangle \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ a $l \in \langle 0,3; 1,9 \rangle \text{ m}$. Uvedené intervaly definujú obmedzujúce podmienky kladené na tieto premenné. Riešený systém je navyše ovplyvnený tiažovým zrýchlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Obr. 1. Riešená sústava

V tomto prípade je cieľom optimalizácie dosiahnuť požadované vlastné frekvencie systému, pomocou vhodne nastavených hodnôt optimalizačných premenných, ktoré musia spĺňať definované obmedzujúce podmienky. Vzhľadom na to, že mechanizmus je modelovaný ako lineárny a má dva $^{\circ}V$, má tiež práve dve vlastné uhlové frekvencie ω_i . Cieľom optimalizácie je, aby boli hodnoty týchto frekvencií $\omega_1 = \Omega_1 = \sqrt{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a $\omega_2 = \Omega_2 = \sqrt{170} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ak zavedieme substitučné funkcie $X = \dot{\chi}$ a $\Phi = \dot{\phi}$, môžeme pohybové rovnice transformovať na systém diferenciálnych rovníc prvého rádu, v maticovom tvare:

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{f}, \quad (1)$$

kde $\mathbf{f} = [\chi \ \phi \ X \ \Phi]^T$, pričom pre maticu \mathbf{A} platí:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{m_1} & \frac{m_2 \cdot g}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m_1 \cdot l} & \frac{-(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot l} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Vlastné uhlové frekvencie systému získame riešením nasledujúceho determinantu:

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}| = 0, \quad (3)$$

kde \mathbf{I} označuje jednotkovú maticu a λ_i vlastné čísla matice systému (2). Vzhľadom na to, že ide o systém diferenciálnych rovníc prvého rádu, platí, že $\lambda_i = \omega_i$. Vďaka jednoduchosti riešeného systému dokázali autori nájsť analytické riešenie pre kvadráty vlastných uhlových frekvencií v tvare:

$$\omega_{1,2}^2 = -\frac{(M \cdot g + k \cdot l)}{2 \cdot m_1 \cdot l} \pm \frac{\sqrt{(M \cdot g + k \cdot l)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot gkl}}{2 \cdot m_1 \cdot l}, \quad (4)$$

kde $M = m_1 + m_2$ označuje celkovú hmotnosť sústavy.

Parametre k , l , pre ktoré budú vlastné uhlové frekvencie systému dosahovať požadované hodnoty Ω_1, Ω_2 , bolo taktiež možné vyjadriť analyticky:

$$l_{1,2} = -\frac{m_1 \cdot g \cdot (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \pm \sqrt{Q}}{2 \cdot m_1 \cdot \Omega_1^2 \cdot \Omega_2^2}, \quad (5)$$

$$k_{1,2} = -\frac{\Omega_1^2 \cdot (m_1 \cdot l_{1,2} \cdot \Omega_1^2 + M \cdot g)}{\Omega_1^2 \cdot l_{1,2} + g}, \quad (6)$$

kde:

$$Q = (m_1 \cdot g)^2 \cdot (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2 - 4 \cdot m_1 \cdot M \cdot (g \cdot \Omega_1 \cdot \Omega_2)^2. \quad (7)$$

To znamená, že vlastné uhlové frekvencie $\Omega_1 = \sqrt{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a $\Omega_2 = \sqrt{170} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ je možné dosiahnuť pri $l = 0,853 \text{ m}$ a $k = 184,741 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Zvyšný pár riešení nie je v súlade s obmedzujúcimi podmienkami.

2 OPTIMALIZAČNÝ PROCES

Cieľová funkcia F_O je na obr. 2 a je definovaná, ako:

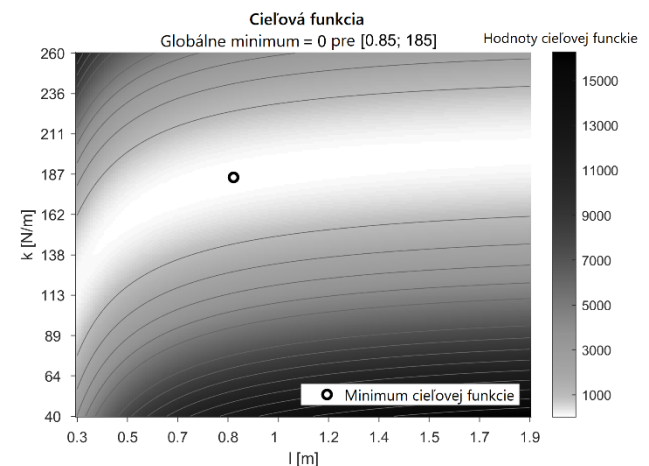
$$F_O = \sum_i (\Omega_i^2 - \omega_i^2)^2, \text{ pre } i = 1, 2, \quad (8)$$

kde ω_i^2 označuje kvadráty vlastných uhlových frekvencií, zodpovedajúcich hodnotám optimalizačných premenných, zvolených v danom iteračnom kroku.

Obmedzujúce podmienky boli implementované do cieľovej funkcie prostredníctvom kvadratickej penalizačnej funkcie. Použitie kvadratického tvaru

bolo zvolené na zabezpečenie hladkej cieľovej funkcie, čo predstavuje nevyhnutnú podmienku pre správne fungovanie a konvergenciu použitých optimalizačných algoritmov. Tými sú metódy *SDM*, *DFP* a *BFGS*, pričom metóda *SDM* slúžila ako referenčná.

Vzhľadom na to, že poloha optima bola určená vopred, analyticky, je možné posúdiť aj presnosť jednotlivých algoritmov. Tá bola posudzovaná podľa dosiahnutej hodnoty cieľovej funkcie v nájdenom optime (platí, že $\min(F_O) = 0$). Okrem toho boli algoritmy porovnané na základe počtu iterácií a celkového času potrebného počas optimalizácie. Každý algoritmus bol spustený 500-krát, vždy z iného, náhodne generovaného, štartovacieho bodu. Súbor týchto 500 bodov bol spoločný pre všetky algoritmy. Získané výsledky boli následne štatisticky spracované v programe *Matlab*. Podarilo sa tak získať stredné hodnoty a smerodajné odchýlky (*SO*) sledovaných porovnávacích veličín. Ako už bolo uvedené, výsledky získané použitím metódy *SDM* slúžili ako referenčné.



Obr. 2. Zobrazenie cieľovej funkcie

3 VÝSLEDKY

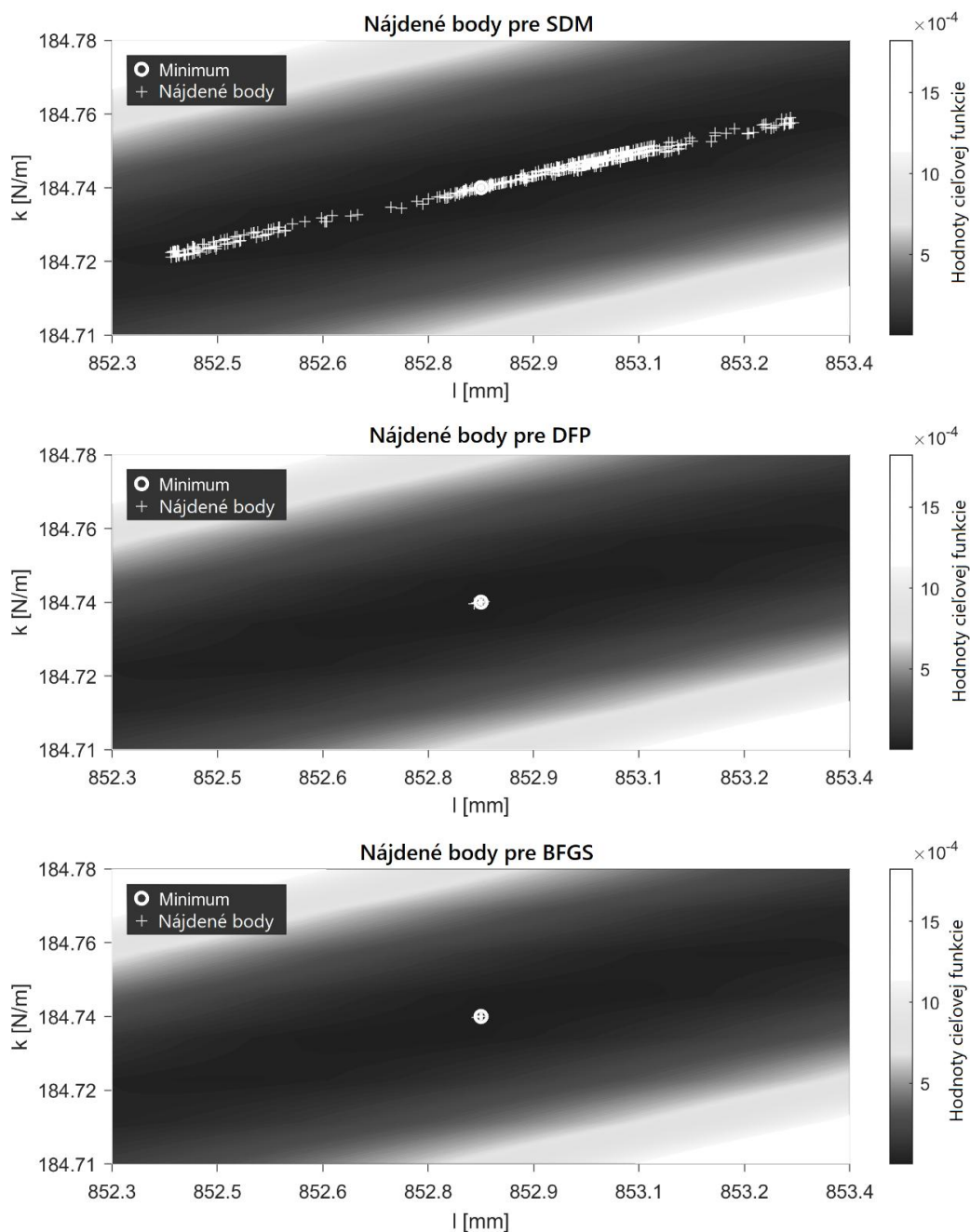
Presnosť a efektivita skúmaných algoritmov boli vyhodnocovaná na základe priemerných hodnôt cieľovej funkcie v nájdenom optime a na základe počtu iterácií a celkového času potrebného na optimalizáciu. Tieto hodnoty, vrátane príslušných smerodajných odchýlok a minimálnych a maximálnych hodnôt, sú uvedené v tab. 1, pričom výsledky pre metódu *SDM* boli zvolené ako referenčné dáta.

Na základe získaných dát je možné povedať, že *quasi-Newtonove* metódy dosahujú výrazne lepšie výsledky ako metóda *SDM*. Toto tvrdenie platí v prípade rýchlosti konvergencie a súčasne aj presnosti. Ako je možné vidieť, *quasi-Newtonove* metódy vyžadujú v priemere zhruba o 90 % menej iteračných krokov, čoho dôsledkom je aj o zhruba 90 % menší výpočtový čas, v porovnaní s metódou *SDM*. Súčasne je možné

Tab. 1. Výsledky

Algoritmus			<i>SDM</i> *	<i>DFP</i>	<i>BFGS</i>
Hodnota cieľovej funkcie	[(rad·s ⁻¹) ⁴]	priemer	5,526×10 ⁻⁶	6,518×10 ⁻¹¹	4,186×10 ⁻¹¹
		<i>SO</i>	5,892×10 ⁻⁶	5,111×10 ⁻¹⁰	1,151×10 ⁻¹⁰
Počet iterácií	[-]	priemer	113,7	10,45 (-90,81 %)*	8,148 (-92,83 %)*
		max / min	895 / 5	173 / 4	17 / 4
		<i>SO</i>	167,7	15,88	2,495
Celkový čas	[ms]	priemer	160,2	19,54 (-87,80 %)*	15,46 (-90,35 %)*
		max / min	1251 / 7,189	286,9 / 6,761	33,50 / 6,324
		<i>SO</i>	229,1	27,02	4,938

* Hodnoty pre *SDM* boli zvolené ako referenčné



Obr. 3. Výsledky

pozorovať, že hodnoty smerodajných odchýlok počtu iterácií a výpočtového času sú pre metódu *SDM*

pomerne veľké, pričom prekračujú aj príslušné stredné hodnoty. Tento jav naznačuje, že celková

efektivita metódy *SDM* je vo veľkej miere ovplyvnená voľbou polohy štartovacieho bodu.

Aj v prípade hodnotenia presnosti dosiahli oba *quasi-Newtonove* algoritmy lepšie výsledky ako metóda *SDM*. Uvedené porovnanie presnosti je znázornené na obr. 3. Algoritmy *DFP* a *BFGS* sa počas riešenia dokázali dostať bližšie k analyticky určenému minimu, čo okrem výsledkov uvedených v tab. 1 dokumentuje aj obr. 3. Ten popisuje rozptyl bodov, ktoré predstavujú minimá nájdené jednotlivými algoritmi, pričom každý z týchto bodov zodpovedá jednému z 500 štartovacích bodov. Na obrázku sú uvedené výseky cieľovej funkcie v blízkom okolí analyticky určeného minima. Rozptyl bodov pri *quasi-Newtonových* metódach je v porovnaní s metódou *SDM* prakticky zanedbateľný. Avšak, aj v prípade tohto algoritmu boli jednotlivé minimá nájdené s pomerne veľkou presnosťou, pričom rozptyl získaných výsledkov nemá zásadný vplyv na vlastné frekvencie optimalizovaného systému.

Pri vzájomnom porovnaní *quasi-Newtonových* metód je možné vidieť, že algoritmus *BFGS* je mierne efektívnejší, ako *DFP*, čo dokumentuje menšia stredná hodnota počtu iterácií a výpočtového času. Významnejšie rozdiely však vznikajú v prípade smerodajných odchýlok, ktoré naznačujú menšiu citlivosť na voľbu polohy štartovacieho bodu v prípade algoritmu *BFGS*. Z hľadiska presnosti sú rozdiely medzi metódami *DFP* a *BFGS* prakticky zanedbateľné.

Na základe celkových výsledkov je možné povedať, že *quasi-Newtonove* metódy umožňujú výrazný nárast efektivity riešenia optimalizácie, v porovnaní so základnou metódou *SDM*.

ZÁVER

Táto práca bola venovaná porovnaniu efektivity a presnosti metódy *SDM* a *quasi-Newtonových* algoritmov *DFP* a *BFGS*. Uvedené algoritmy boli naprogramované v programe *Matlab* a aplikované pri optimalizácii parametrov jednoduchého mechanizmu s dvomi °V, za účelom jeho spektrálneho naladenia. Pri uvedených algoritmoch bol skúmaný počet potrebných iterácií a celkový výpočtový čas, ako parametre charakterizujúce efektívnosť a dosiahnuté minimálne hodnoty cieľovej funkcie, ktoré slúžili ako charakteristika presnosti algoritmov. Uvedené dáta boli štatisticky spracované v programe *Matlab*, pričom výsledné štatistické veličiny tvorili základ pre vzájomné porovnanie skúmaných algoritmov.

Z porovnania jednotlivých algoritmov vyplýva, že *quasi-Newtonove* metódy v zásadnej miere presahujú možnosti základnej metódy *SDM*, pričom sa vyznačujú najmä vysokou efektívnosťou. Tá je charakterizovaná výrazným poklesom počtu

potrebných iterácií a aj výpočtového času, pričom sa v priemere jedná o zhruba 90% pokles. Ďalšou prednosťou algoritmov *DFP* a *BFGS*, v porovnaní s metódou *SDM*, je ich výrazne nižšia citlivosť na voľbu štartovacieho bodu. Prejav nižšej citlivosti je možné zaznamenať na základe nízkych hodnôt smerodajných odchýlok sledovaných porovnávacích veličín. Rozdiely medzi jednotlivými algoritmi sú pozorovateľné aj pri dosahovanej presnosti, ktorá je viditeľne vyššia v prípade *quasi-Newtonových* metód. V tomto prípade však nárast efektivity predstavuje významnejší jav.

Zo vzájomného porovnania metód *DFP* a *BFGS* vychádza, že druhý uvedený algoritmus dosahuje vyššiu efektívnosť, avšak len vo veľmi obmedzenej miere. Metóda *BFGS* sa okrem toho vyznačuje menšou citlivosťou na voľbu počiatočného bodu, avšak opäť len v pomerne malej miere voči metóde *DFP*. Z hľadiska presnosti sú oba algoritmy navzájom porovnateľné.

Výsledky ukazujú, že v prípade rozhodovania medzi gradientnými optimalizačnými algoritmi sú modifikované, *quasi-Newtonove* metódy podstatne lepšou voľbou, než základné metódy, ktoré využívajú len výpočet gradientu, a to najmä vďaka výrazne vyššej efektívnosti, ktorú dokážu dosiahnuť.

Podakovanie

Táto práca vznikla s podporou grantového projektu VEGA, 1/0423/23 a projektov KEGA 002ŽU-4/2023 a KEGA 005ŽU-4/2024.

LITERATÚRA

- [1] SVOBODA, M. - SCHMID, V. - SOUKUP, J - SAPIETA, M. (2017): *Modal Analysis of the Vehicle Model*. In: *Dynamical Systems in Applications*, Łódź, Poland, pp. 351-362.
- [2] SÁGA, M. - VAŠKO, M. - KOCÚR, R. - TOTH, E. (2006): *Aplikácia optimalizačných algoritmov v mechanike telies*. Žilina, VTS pri ŽU.
- [3] MENON, C. - VERTECHY, M. - MARKOT, C. - CASTELLI, V. P. (2009): *Geometrical Optimization of Parallel Mechanisms Based on Natural Frequency Evaluation: Application to a Spherical Mechanism for Future Space Applications*. In: *IEEE Transactions on Robotics*, 25(1), pp. 12-24. DOI: 10.1109/TRO.2008.2008744.
- [4] DONG-HUI, L. - FUKUSHIMA, M. (2000): *On the Global Convergence of BFGS Method for Nonconvex Unconstrained Optimization Problems*. In: *SIAM Journal on Optimization*, 11(4). DOI: 10.1137/S1052623499354242
- [5] FLETCHER, R. - POWELL, M. J. D. (1963): *A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization*. In: *The Computer Journal*, 6(2), pp. 163-168.