
Model nelineárneho oscilátora

Ján Minárik, Ing.*

Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: jan.minarik@fstroj.uniza.sk

Branislav Ftorek, doc. Mgr., PhD.

Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: branislav.ftorek@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4962

Radoslav Chupáč, RNDr., PhD.

Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: radoslav.chupac@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4954

A model of a nonlinear oscillator

Abstract: This article deals with a simple nonlinear model of mechanical system. Nonlinear mechanical model described by a nonlinear system of differential equations can lead to interesting phenomena. The linearized analytical solution is compared with the numerical solution obtained by the *Runge-Kutta method* in the *MATLAB* environment.

Keywords: nonlinear oscillations, differential equation, *Lagrangian mechanics*

ÚVOD

Kmitanie a vibrácie sú prirodzeným javom, ktorý sprevádza činnosť takmer každého stroja. V praxi sú vibrácie a kmitanie strojných súčastí väčšinou považované za negatívny jav, ktorý je potrebné v čo najväčšej miere eliminovať z dôvodu zvýšenej záťaž pre zariadenia. Vibrácie môžu viesť k poruchám a v hraničných prípadoch až k deštrukcii častí zariadení, nepresnostiam výroby, uvoľňovaniu spojov a rôznym iným medzným stavom. Vibrácie a nimi spôsobený hluk taktiež predstavujú pre človeka významné zdravotné riziko. Javy spojené s kmitaním a rôznym typom vibrácií sú prítomné takmer pri každom zariadení, pričom sa vždy nemusí jednať len o stroje s pohyblivými časťami, ale aj o statické konštrukcie, ktoré môžu byť zaťažované dynamicky alebo sa nachádzajú v blízkosti zdroja vibrácií.

Medzi zdroje vibrácií strojných zariadení patria pohyblivé a rotujúce časti, ložiská, dotýkajúce sa povrchy, ozubené kolesá atď. Zdrojom kmitania môžu byť aj zaťažujúce sily, impulzy síl a momentov pri činnosti spaľovacích motorov alebo prúdiace tekutiny. Pri periodickom pohybe pohyblivých častí pôsobia dynamické reakčné sily, ktoré sa prenášajú na zvyšok konštrukcie a vyvolávajú jej vibrácie. Vibrácie a hluk sú významným ukazovateľom pri

meraní a diagnostike strojov. Zvýšené vibrácie a hluk môžu byť prejavom poškodenia alebo blížiaceho sa medzného stavu zariadenia [1, 2].

Matematickým modelom kmitajúceho systému s jedným stupňom voľnosti je diferenciálna rovnica 2. rádu. Koeficienty rovníc sú vo všeobecnosti funkcie závislé od času. Je to napríklad lineárny oscilátor s nekonštantnými tlmiacimi a tuhostnými charakteristikami.

Reálne deje sú častokrát nelineárne a ich matematický popis obsahuje nelineárne diferenciálne rovnice, resp. systémy týchto rovníc. V takýchto prípadoch môžeme použiť numerické metódy alebo niekedy tiež kombinácie numericko-analytických aproximácií. Okrem toho existujú linearizačné procedúry, ktoré umožňujú analytické riešenie problému, dochádza však z princípu ku vzniku rôznych typov nepresností, ktoré toto riešenie môžu úplne znehodnotiť.

V prípade nelineárnych systémov môžeme taktiež hovoriť o vlastnom, tlmenom alebo vynútenom kmitaní. Vo všeobecnom prípade má pohybová rovnica takýchto systémov tvar:

$$\ddot{y} = F(y, \dot{y}, t). \quad (1)$$

Jednou z vlastností nelineárnych systémov je, že ich perióda závisí aj od amplitúdy ich kmitov.

Ak časovo závislé veličiny v rovnici (1) dokážeme separovať v podobe samostatnej funkcie, dostaneme rovnicu núteného kmitania v tvare:

$$\ddot{y} + w(y, \dot{y}) = F(t). \quad (2)$$

Ak navyše nevažujeme budiace sily, pri zanedbanom tlmení systému, dostaneme najjednoduchší tvar nelineárnych pohybových rovníc vyjadrujúci vlastné netlmené kmitanie:

$$\ddot{y} + w(y) = 0. \quad (3)$$

Člen $w(y)$, ktorý je nelineárnou funkciou výchylky, sa zvyčajne označuje ako elastická charakteristika. Nelineárne fyzikálne fenomény môžu byť popísané rovnicou s časovo závislými členmi:

$$x + \omega_0^2 \cdot x + \varepsilon \cdot f(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (4)$$

V prípade malého parametra ε , $0 < \varepsilon \ll 1$ sa môžu pri riešení použiť známe *asymptotické metódy* [3, 4].

Štúdium nelineárnych systémov je perspektívnou oblasťou aplikovaného výskumu, ktorá aj v súčasnosti zaznamenáva značný rozvoj, pričom nelineárna dynamika a nelineárne dynamické systémy sú neoddeliteľnou súčasťou inžinierskej praxe (pozri napr. práce [5, 6]).

1 LAGRANGEOVE ROVNICE

Zostavovanie pohybových rovníc v iných ako *kartézskych* súradniciach je zvyčajne komplikované, a to najmä pri komplexnejších sústavách telies. Samotná znalosť *Newtonovho zákona* v prípade zložitejších úloh preto nepredstavuje efektívny spôsob zostavovania pohybových rovníc. Vhodnou alternatívou, ktorá poskytuje ekvivalentné výsledky, či už v ľubovoľných súradnicových systémoch alebo tiež pri zložitých sústavách telies, je zostavenie pohybových rovníc metódami analytickej mechaniky [7].

Zovšeobecnené súradnice predstavujú súbor ľubovoľných parametrov, ktorými je možné jednoznačne určiť polohu bodu, bez ohľadu na zvolený súradnicový systém:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_k, t). \quad (5)$$

kde \mathbf{r}_i je polohový vektor i -teho bodu.

Súbor k zovšeobecnených súradníc je možné zapísať skráteno ako $q = \{q_k\}$. Derivácia týchto súradníc podľa času je súbor zovšeobecnených rýchlostí, t. j.:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \{\dot{q}_k\}. \quad (6)$$

Stav mechanickej sústavy je v danom časovom okamihu jednoznačne určený jej polohou a rýchlosťou. Na základe týchto parametrov je možné vypočítať pohyb sústavy v nasledujúcom okamihu, resp. všeobecne vývoj jej stavu.

Stav mechanickej sústavy popisujeme funkciou:

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V. \quad (7)$$

Lagrangeova funkcia (Lagrangian) je definovaná ako rozdiel kinetickej T a potenciálnej energie V . Princíp najmenšieho účinku je variačným princípom a hovorí, že sústava sa pri pohybe medzi dvoma polohami správa tak, aby funkcionál:

$$S = \int_{q_1}^{q_2} L(q, \dot{q}, t) \cdot dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

nadobúdal minimálnu hodnotu. Integrál (8) sa nazýva účinnok. Počiatočná a konečná poloha sústavy sú dané súradnicami $q(t_1)$ $q(t_2)$.

S využitím metód variačného počtu je možné odvodiť všeobecný tvar pohybových rovníc:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad (9)$$

Euler-Lagrangeove rovnice sú sústava diferenciálnych rovníc 2. rádu, ktorých počet zodpovedá počtu zovšeobecnených súradníc a ktorých riešením sú funkcie $q_k(t)$, určujúce dráhy jednotlivých bodov.

Pre všeobecnejší prípad, kedy na sústavu nepôsobia len potenciálové sily, môžeme zaviesť pojem zovšeobecnená sila Q :

$$Q_k = \sum_i X_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + Y_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + Z_i \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \quad (10)$$

kde X_i, Y_i, Z_i sú zložkami síl F_i .

Ak navyše uvažujeme aj tlmiace sily, ktoré sú v tomto prípade lineárnymi funkciami rýchlosti (viskózne tlmenie), môžeme rovnako zaviesť zovšeobecnú odporovú silu Q_0 . Pre uvedené odporové sily platí vzťah $F_{0i} = -\dot{\mathbf{r}}_i \cdot b_i$, kde b_i určuje koeficient tlmenia i -tej sily. Zovšeobecnené sily Q_0 sú potom dané vzťahom:

$$Q_{0k} = \sum_i -b_i \cdot \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \dot{y}_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \dot{z}_i \cdot \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right) \quad (11)$$

Zovšeobecnené odporové sily je súhrnne možné vyjadriť pomocou *Rayleighovej disipatívnej funkcie*:

$$R_D = \sum_i \frac{1}{2} \cdot b_i \cdot (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (12)$$

S uvažovaním uvedených síl môžeme zapísať všeobecnejší tvar *Euler-Lagrangeových rovníc* [7]:

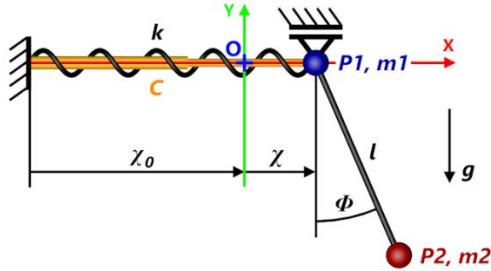
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k - \frac{\partial R_D}{\partial q_k} \quad (13)$$

3 MODEL NELINEÁRNEJ SÚSTAVAVY

Modelovaná sústava je zobrazená na obr. 1. Ide o rovinné kyvadlo tvorené hmotným bodom P_2 , s hmotnosťou m_2 , na závese dĺžky l , ktoré je uchytené

na horizontálnom oscilátore (bod P_1), s hmotnosťou m_1 . Pružina oscilátora má počiatočnú dĺžku χ_0 , jej tuhosť je k a koeficient tlmenia C . Model uvažujeme ako sústavu hmotných bodov, hmotnosti závesu a pružiny, tiež príslušné momenty zotrvačnosti preto zanedbávame. Veľkosť tiažového zrýchlenia je g .

Poloha sústavy je definovaná pomocou dvoch zovšeobecnených súradníc χ a Φ . Rovnovážna poloha oscilátora sa nachádza v strede súradnicovej sústavy, ktorý zodpovedá bodu O .



Obr. 1. Kyvadlo na kmitajúcom závese

Najskôr zostavíme *Lagrangian* sústavy v tvare:

$$L = T - V. \quad (14)$$

Kinetická energia bodu P_1 je potom daná ako:

$$T_{P_1} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{\chi}^2 \quad (15)$$

Poloha bodu P_2 je $x_{P_2} = \chi + l \cdot \sin \phi$, $y_{P_2} = -l \cdot \cos \phi$ a po derivácii $\dot{x}_{P_2} = \dot{\chi} + l \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \phi$, $\dot{y}_{P_2} = l \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \phi$.

Kinetická energia bodu P_2 je:

$$T_{P_2} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_{P_2}^2 + \dot{y}_{P_2}^2) \quad (16)$$

Pre kinetickú energiu sústavy potom platí:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{\chi}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{\chi}^2 + l^2 \cdot \dot{\phi}^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{\chi} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \phi) \quad (17)$$

Potenciálna energia V je daná:

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \chi^2 + m_2 \cdot g \cdot (l - l \cdot \cos \phi) \quad (18)$$

Po zanedbaní konštantných členov môžeme *Lagrangian* sústavy zapísať ako:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \cdot \left[m_1 \cdot \dot{\chi}^2 + m_2 \cdot (\dot{\chi}^2 + l^2 \cdot \dot{\phi}^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{\chi} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \phi - k \cdot \chi^2) \right] + m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos \phi \quad (19)$$

Tlmiaca sila F_D je úmerná rýchlosti predĺženia pružiny, ktorá zodpovedá zovšeobecnenej rýchlosti $\dot{\chi}$. *Rayleighova disipatívna funkcia* má preto tvar:

$$R_D = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \dot{\chi}^2 \quad (21)$$

Odporová sila F_D je potom daná ako:

$$F_D = -\frac{\partial R_D}{\partial \dot{\chi}} = -C \cdot \dot{\chi} \quad (22)$$

Pretože R_D je funkciou len zovšeobecnenej rýchlosti $\dot{\chi}$, bude odporová sila F_D vystupovať len v rovnici patriacej k zovšeobecnenej súradnici χ .

Pre derivácie *Lagrangeovej funkcie* (4) príslúchajúcej k súradnici ϕ platí:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = m_2 \cdot l \cdot (l \cdot \dot{\phi} + \dot{\chi} \cdot \cos \phi), \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = m_2 \cdot l \cdot (l \cdot \ddot{\phi} + \ddot{\chi} \cdot \cos \phi - \dot{\chi} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \phi), \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -m_2 \cdot l \cdot \sin(\phi) \cdot (\dot{\chi} \cdot \dot{\phi} + g). \quad (25)$$

Po dosadení vzťahov **Chyba! Nenašiel sa žiaden zdroj odkazov.**, (25) do (9) a následnej úprave dostávame prvú pohybovú rovnicu:

$$l \cdot \ddot{\phi} + \ddot{\chi} \cdot \cos \phi + g \cdot \sin \phi = 0. \quad (26)$$

Pre derivácie patriace k súradnici χ analogicky platí:

$$\frac{\partial L}{\partial \chi} = (m_1 + m_2) \cdot \dot{\chi} + m_2 \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \phi, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}} \right) = (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\chi} + m_2 \cdot l \cdot (\ddot{\phi} \cdot \cos \phi - \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi). \quad (28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \chi} = -k \cdot \chi. \quad (29)$$

S uvažovaním odporovej sily (22) a (13) má druhá pohybová rovnica tvar:

$$m_2 \cdot l \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos \phi + (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\chi} - m_2 \cdot l \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi + k \cdot \chi + C \cdot \dot{\chi} = 0. \quad (30)$$

Rovnice (26) a (30) sú systémom nelineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu. Zavedieme substitúciu:

$$y_1 = X = \dot{\chi}, \quad y_2 = \Phi = \dot{\phi}, \quad y_3 = \ddot{\chi}, \quad y_4 = \ddot{\phi}, \quad (31)$$

Tým dostávame sústavu štyroch rovníc:

$$y_1 = \dot{\chi} = X \quad (32)$$

$$y_2 = \dot{\phi} = \Phi$$

$$y_3 = \dot{\chi} =$$

$$= \frac{m_2 \cdot g \cdot \sin(2 \cdot \phi) + 2 \cdot \Phi^2 \cdot l \cdot \sin \phi - 2 \cdot k \cdot \chi - 2 \cdot C \cdot X}{2 \cdot (m_1 + m_2 \cdot \sin^2 \phi)}$$

$$y_4 = l \cdot (m_1 + m_2 \cdot \sin^2 \phi) \cdot \Phi =$$

$$= g \cdot \sin \phi \cdot (m_1 + m_2 \cdot \sin^2 \phi) + \cos \phi \cdot (k \cdot \chi + C \cdot X) -$$

$$-\frac{m_2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \phi) \cdot (g \cdot \cos \phi + l \cdot \Phi^2).$$

Systém rovníc (32) bol následne riešený numericky v prostredí *MATLAB* s využitím funkcie *ODE45* vychádzajúcej z metódy *Runge-Kutta-Fehlberg (RKF)*.

Po linearizácii *Lagrangiánu* (14) môžeme odvodiť lineárne pohybové rovnice, ktoré sú riešiteľné analyticky. Predpokladáme, že toto riešenie bude v dostatočnej miere zodpovedať skutočnému pohybu sústavy len pre malé hodnoty zovšeobecných parametrov.

Linearizovaný Lagrangián sústavy je v tvare:

$$L = \frac{1}{2} \cdot [m_1 \cdot \dot{\chi}^2 + m_2 \cdot (\dot{\chi}^2 + l^2 \cdot \dot{\phi}^2 + 2 \cdot l \cdot \dot{\chi} \cdot \dot{\phi}) - k \cdot \chi^2] - m_2 \cdot g \cdot l \cdot \frac{\phi^2}{2}. \quad (33)$$

Lineárne pohybové rovnice je možné odvodiť rovnakým spôsobom ako v predošlom prípade. Majú tvar:

$$l \cdot \ddot{\phi} + \ddot{\chi} + g \cdot \phi = 0 \quad (34)$$

$$m_2 \cdot l \cdot \ddot{\phi} + (m_1 + m_2) \cdot \ddot{\chi} + k \cdot \chi + C \cdot \dot{\chi} = 0.$$

Sústavu (34) môžeme v tvare matic zapísať ako:

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ m_1 + m_2 & m_2 \cdot l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\chi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Zavedením funkcií $X = \dot{\chi}$ a $\Phi = \dot{\phi}$ dostávame sústavu 4 rovníc prvého rádu v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\phi} \\ \dot{X} \\ \dot{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{m_2 \cdot g}{m_1} & -\frac{C}{m_1} & 0 \\ \frac{k}{m_1 \cdot l} & -\frac{(m_1 + m_2) \cdot g}{m_1 \cdot l} & \frac{C}{m_1 \cdot l} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \\ X \\ \Phi \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Sústava n homogénnych lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami je v maticovom tvare daná:

$$y' = A \cdot y, \quad (37)$$

kde A je konštantná matica sústavy s rozmerom $n \times n$.

Riešením (37) je všeobecne ľubovoľný vektor:

$$y = [y_1(t), \dots, y_n(t)]^T. \quad (38)$$

Ak vektory $y^1(t)$, $y^2(t)$, ..., $y^k(t)$ sú lineárne nezávislé riešenia (37), potom ich lineárna kombinácia je všeobecným riešením pre ľubovoľné konštanty c_i , t. j.:

$$y(t) = \sum_{i=1}^k c_i \cdot y^i(t). \quad (39)$$

Predpokladáme, že riešenie (37) má tvar:

$$y = k \cdot e^{\lambda t}, \quad (40)$$

kde k je vektor,

λ neznáme číslo.

Po dosadení predpokladaného riešenia do (37) dostaneme problém nájsť vlastné čísla a vektory štvorcovej matice A [8]:

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0, \quad (41)$$

$$(A - \lambda \cdot I) \cdot k = 0, \quad (42)$$

kde λ je vlastné číslo matice,

k je príslušný vlastný vektor matice A ,

I označuje jednotkovú maticu.

Pre dané konkrétne parametre:

$$\left(m_1 [\text{kg}]; m_2 [\text{kg}]; l [\text{m}]; k \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]; C \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right]; g \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \right) = (1,25; 1,5; 1,4; 25; 2,5; 9,81), \quad (43)$$

má analytické riešenie lineárnej sústavy (36) tvar:

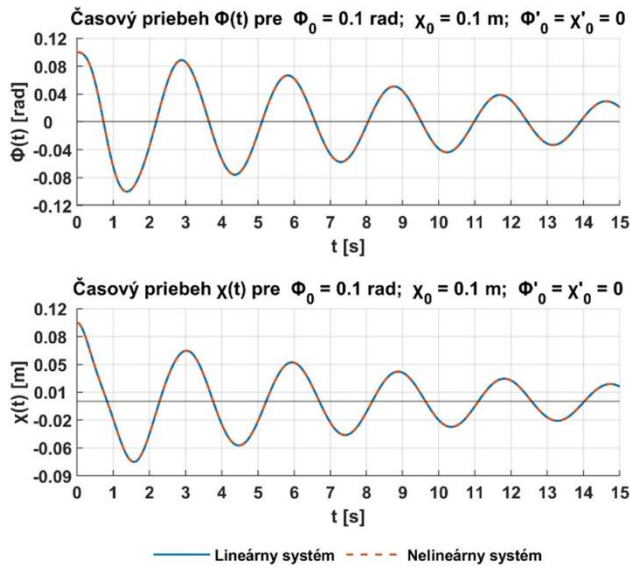
$$\begin{aligned} \phi &= c_1 \cdot e^{-0,90t} \cdot [0,02 \cdot \cos(5,47 \cdot t) - 0,13 \cdot \sin(5,47 \cdot t)] + \\ &+ c_2 \cdot e^{-0,90t} \cdot [0,02 \cdot \sin(5,47 \cdot t) + 0,13 \cdot \cos(5,47 \cdot t)] + \\ &+ c_3 \cdot e^{-0,10t} \cdot [-0,07 \cdot \cos(2,15 \cdot t) + 0,24 \cdot \sin(2,15 \cdot t)] + \\ &+ c_4 \cdot e^{-0,10t} \cdot [-0,07 \cdot \sin(2,15 \cdot t) - 0,24 \cdot \cos(2,15 \cdot t)] \\ \chi &= c_1 \cdot e^{-0,90t} \cdot [-0,03 \cdot \cos(5,47 \cdot t) + 0,12 \cdot \sin(5,47 \cdot t)] + \\ &+ c_2 \cdot e^{-0,90t} \cdot [-0,03 \cdot \sin(5,47 \cdot t) - 0,12 \cdot \cos(5,47 \cdot t)] + \\ &+ c_3 \cdot e^{-0,10t} \cdot [-0,01 \cdot \cos(2,15 \cdot t) + 0,33 \cdot \sin(2,15 \cdot t)] + \\ &+ c_4 \cdot e^{-0,10t} \cdot [-0,01 \cdot \sin(2,15 \cdot t) - 0,33 \cdot \cos(2,15 \cdot t)]. \end{aligned} \quad (44)$$

Pre zvolené počiatkové podmienky majú potom konštanty c_i hodnoty:

$$c_1 \doteq 0,08; c_2 \doteq 0,21; c_3 \doteq -0,06; c_4 \doteq -0,68. \quad (46)$$

Z porovnania priebehov na obr. 2 je vidieť, že pre malé hodnoty zovšeobecných súradníc sú riešenia

nelineárneho systému (32) a linearizovaného (36) prakticky identické, v celom rozsahu časového intervalu.



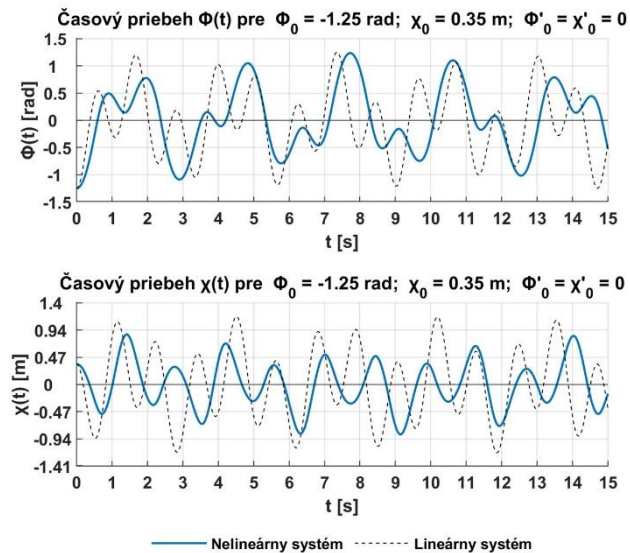
Obr. 2. Riešenie (32) a (36) pre malé výchylky

Keďže je sústava tlmená, dochádza k postupnému poklesu výchyliek, čím je zároveň vo veľkej miere potláčané nelineárne správanie systému.

Riešenie systému pre veľké výchylky s počiatočnými podmienkami:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= -1,25 \text{ rad}; \chi_0 = 0,35 \text{ rad} \\ \dot{\phi}_0 &= 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}; \dot{\chi}_0 = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

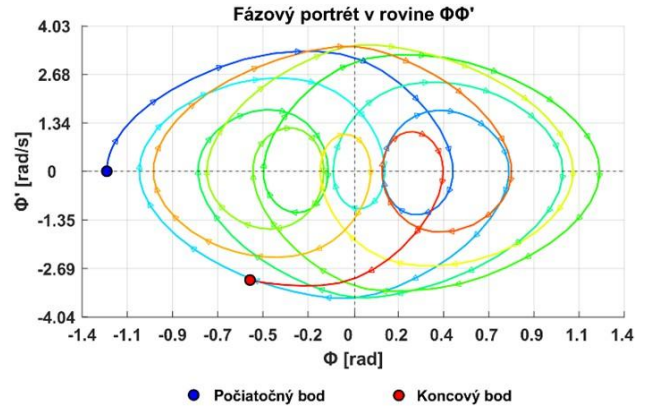
je na obr. 3.



Obr. 3. Riešenie (32) a (36) pre veľké výchylky

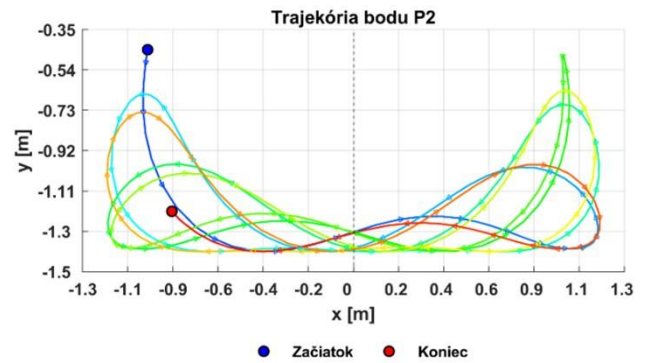
Parametre sústavy zostali rovnaké ako v predošlom prípade, pričom však bolo zanedbané tlmenie ($C = 0$), aby nebolo potláčané nelineárne správanie sústavy.

Fázový portrét pre zovšeobecnenú súradnicu ϕ je uvedený na obr. 4.



Obr. 4. Fázový portrét nelineárnej sústavy (32)

Grafické priebehy riešení ukazujú, že v prípade väčších výchyliek sa periodickosť riešení stráca a ich správanie sa stáva chaotickým. Pre úplnosť je uvedené aj riešenie lineárneho systému (36), ktoré sa od toho numerického výrazne odlišuje prakticky už od začiatku pohybu.



Obr. 4. Trajektória koncového bodu pre (32)

ZÁVER

Modelom mnohých dejov okolo nás je dynamický systém, ktorého stav sa spojitne mení v čase.

Podľa parametrov fyzikálneho modelu rozlišujeme *systémy so sústrednými parametrami*, ktoré sú opisované *obyčajnými diferenciálnymi rovnicami* a *systémy s rozloženými parametrami*, ktorých modelom sú *parciálne diferenciálne rovnice*. Teória dynamických systémov a diferenciálnych rovníc patrí medzi klasické oblasti matematiky a jej aparát je používaný pre vedecko-technické výpočty v rôznych aplikovaných oblastiach.

Diferenciálne rovnice, ktoré sú matematickým modelom kmitajúcich sústav, dokážeme riešiť analyticky len v prípade lineárnych rovníc s konštantnými koeficientami a bez prípadných nelineárnych členov. Riešenie nelineárnych sústav značne komplikuje neplatnosť *princípu superpozície*.

Niektoré približné analytické metódy poskytujú pomerne dobré aproximácie riešení nelineárnych diferenciálnych rovníc, no veľakrát sme nútení používať len numerické algoritmy. Tie sú do značnej miery robustné a spoľahlivé, avšak neumožňujú nám globálny pohľad na analyzovaný nelineárny systém.

V nelineárnych sústavách vznikajú a sú prítomné fenomény, ktoré v lineárnych sústavách neexistujú, napr. chaos, bifurkácie riešení, subharmonické a ultraharmonické kmity, solitónové riešenia vlnových rovníc a pod. [9].

PodĎakovanie

Táto práca bola vytvorená v rámci projektu KEGA 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov pre zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni štúdia na technických VŠ.

LITERATÚRA

- [1] MINÁRIK, J. (2024): *Kmitanie mechanických sústav*. Diplomová práca, Strojnícka fakulta UNIZA, Edis.
- [2] SMETANA, C. a kol. (1998): *Hluk a vibrace, měření a hodnocení*. 1. Vyd. Praha: Sdělovací technika, 188 s., ISBN 80-901936-2-5.
- [3] STRUBLE, R. A. (1962): *Nonlinear differential equations*. McGraw-Hill book company, New York.
- [4] MURRAY, J. D. (1984): *Asymptotic analysis*. In: Applied mathematical sciences, Springer-Verlag, New-York.

[5] YAKUBU, G. - OLEJNIK, P. - AWREJEWICZ, J. (2022): *On the Modeling and Simulation of Variable-Length Pendulum Systems: A Review*. In: Archives of Computational Methods in Engineering, 29 (4), pp. 2397-2415.

[6] DOBIÁŠ, I. (1988): *Nelineární dynamické soustavy s náhodnými vstupy*. Praha, Academia-nakladatelství ČSAV, 208 s.

[7] LANDAU, L. V. - LIFSHITZ, E. M. (1976): *Mechanics: Volume 1 (Course of Theoretical Physics)*. Oxford: Butterworth-Heinemann, ISBN 978-0-7506-2896-9.

[7] SÁGA, M. - ŽMINDÁK, M. - DEKÝŠ, V. - SAPIETOVÁ, A. - SEGLA, Š. (2009): *Vybrané metody analýzy a syntézy mechanických sústav*. 1. Vyd. Žilina: VTS pri Žilinskej univerzite, 360 s., ISBN 978-80-89276-17-2.

[8] DIBLÍK, J. - RŮŽIČKOVÁ, M. (2008): *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. Vyd. Žilina: EDIS-vydavatelství UNIZA, 312 s., ISBN 978-80-8070-891-7.

[9] STROGATZ, S. H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*. Westview Press, Cambridge.