ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Strojnícka fakulta

DOI: https://doi.org/10.26552/tech. C.2025.2.15

Kinematická analýza rovinného paralelného mechanizmu s tromi vodiacimi reťazcami s neidentickou štruktúrou

Mária Michalková, Ing. RNDr., PhD.*
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: maria.michalkova@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4952

Vladimír Guldan, RNDr.
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: vladimir.guldan@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4965

Branislav Ftorek, doc. Mgr., PhD.
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 1, 010 26 Žilina.
E-mail: branislav.ftorek@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4962

Kinematic analysis of the planar parallel mechanism with three serial chains of non-identical structure

Abstract: In this paper, we analyse the mobility of a planar parallel mechanism with three serial chains. The serial chains consist of three joints with one degree of freedom (rotational and translational), but with a different arrangement or combination of the mentioned joints. Using the Screw theory concept, there is investigated the mobility of the end effector, and the direct and inverse problem for the speeds is formulated, as well. Further, we deal with the occurrence of singular positions of such a mechanism.

Keywords: mobility of mechanism, singularities, planar parallel manipulator.

ÚVOD

Jednou z prvých charakteristík, ktorú o ľubovoľnom mechanizme potrebujeme vedieť, je počet stupňov voľnosti, teda pohyblivosť daného mechanizmu. Táto informácia má zásadný význam pre kinematickú a dynamickú analýzu. Okrem toho umožňuje overiť existenciu nejakého mechanizmu ($DOF > 0$) alebo stanoviť počet aktuátorov pre pohon mechanizmu [1]. Pohyblivosť telesa predstavuje počet nezávislých pohybov, ktoré môže teleso vykonať. Voľné teleso má v priestore šesť stupňov voľnosti. Vo väčšine prípadov je však teleso spojené s okolím geometrickými väzbami, ktoré jeho pohyblivosť znižujú v závislosti od druhu väzby. Pri uvoľňovaní väzby sa nahrádza reakčnou silou, resp. reakčným momentom síl, v závislosti od toho, či odoberá translačné alebo rotačné stupne voľnosti.

Kinematický model ako neoddeliteľná súčasť analýzy mechanizmu je nevyhnutný jednak pre riešenie jeho dynamickej stránky, ako aj pre jeho riadenie a simuláciu. Úlohou kinematickej analýzy je zadefinovať priebeh polohy a orientácie koncového efektora v čase, jeho rýchlosť a zrýchlenie, prípadne ďalšie vyššie derivácie polohy.

V rámci kinematiky sa rozlišujú štyri základné úlohy:

- *priama úloha pre polohu,*
- *inverzná úloha pre polohu,*
- *priama úloha pre rýchlosti,*
- *inverzná úloha pre rýchlosti.*

Pri priamej úlohe pre polohy je potrebné na základe znalosti vzájomnej polohy členov mechanizmu určiť polohu koncového efektora. Vzájomná poloha členov v sériovom mechanizme je určená ich vzdialenosťami a uhlami ich osí; v prípade paralelných mechanizmov sú to dĺžky členov ich ramien, respektíve vzájomné usporiadanie ramien. Inverzná úloha postupuje opačne: zo známej polohy a orientácie koncového

efektora máme určiť topológiu jednotlivých členov mechanizmu. Rovnicu rýchlosti, z ktorej sa vychádza pri riešení priamej alebo inverznej úlohy pre rýchlosti, možno získať jednoducho po zderivovaní rovnice pre polohu členov podľa času. Tento postup, ale môže byť komplikovaný. Ako vhodná alternatíva pre nájdenie rovnice rýchlostí sa javí použitie *Screw theory,* konkrétne použitie recipročných skrutiek.

V článku sa bude vyšetrovať pohyblivosť a formulovať pohybové rovnice pre rovinný paralelný mechanizmus s tromi vodiacimi reťazcami. Špecifikom tohto mechanizmu je, že reťazce nemajú identickú štruktúru. Analýza ukáže, ako to ovplyvní pohyblivosť mechanizmu a výskyt singulárnych polôh.

1 VÄZBY TELIES V SKRUTKOVOM VYJADRENÍ

Akúkoľvek zmenu polohy tuhého telesa v priestore je možné dosiahnuť rotáciou telesa okolo nejakej osi a následným posunutím v smere danej osi. Pri súbežnej realizácii týchto dvoch pohybov ide jednoducho o pohyb telesa po dráhe v tvare skrutkovice.

Z matematického hľadiska s*krutkou* (screw) $ nazývame usporiadanú dvojicu vektorov $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s^0} \in R^3$, zapísanú v tvare duálneho vektora:

$$\$ = (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s^0}). \tag{1}$$

Vektor $\boldsymbol{s}$ predstavuje smerový vektor osi skrutky. Stúpanie skrutky (pitch):

$$h = \frac{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s^0}}{\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s}} \tag{2}$$

je číselná charakteristika skrutky. Operácia „·“ predstavuje skalárny súčin vektorov.

Ak $h = 0$, duálny vektor $\boldsymbol{s^0}$ predstavuje moment priamky ku začiatku súradnicovej sústavy a je definovaný ako vektorový súčin smerového vektora $\boldsymbol{s}$ priamky a polohového vektora $\boldsymbol{r}$ ľubovoľného bodu priamky:

$$\boldsymbol{s^0} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}. \tag{3}$$

Primárna a duálna časť takejto skrutky spĺňajú podmienku ortogonality:

$$\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{s^0} = 0. \tag{4}$$

Ak je stúpanie skrutky $h = \infty$, potom $\$ = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{s})$ za podmienky, že $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{0}$ [2].

Vzhľadom k tomu, že skrutky predstavujú duálne vektory, operácie sčítania a násobenia číslom sú pre nich definované rovnako ako pre vektory (usporiadané n-tice čísel). Rovnako sa tiež chápe lineárna (ne)závislosť skrutiek, preto sa pri vyšetrovaní lineárnej (ne)závislosti skrutiek postupuje rovnako ako pri riešení obdobnej úlohy pre vektory.

Pre určenie pohyblivosti mechanizmu pomocou skrutiek sa využíva recipročný súčin skrutiek. Nech $\$_1 = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_1^0})$, $\$_2 = (\boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_2^0})$ sú ľubovoľné skrutky. Potom sa operácia „∘“, definovanú ako:

$$\$_1 \circ \$_2 = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_1^0}) \circ (\boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_2^0}) = \boldsymbol{s_1} \cdot \boldsymbol{s_2^0} + \boldsymbol{s_2} \cdot \boldsymbol{s_1^0}, \tag{5}$$

nazýva recipročný súčin skrutiek. [2] Maticový tvar recipročného súčinu je:

$$\$_1 \circ \$_2 = \$_1 \, \Delta \, \$_2^T, \tag{6}$$

kde Δ je štvorcová matica rozmeru 6×6 v tvare:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Matica $\boldsymbol{I}$ je jednotková matica a $\boldsymbol{0}$ je nulová matica, obe rozmeru 3×3. Výsledkom recipročného súčinu dvoch skrutiek je skalár.

Dve skrutky $\$_1 = (\boldsymbol{s_1}, \boldsymbol{s_1^0})$, $\$_2 = (\boldsymbol{s_2}, \boldsymbol{s_2^0})$ sa nazývajú recipročné, ak platí:

$$\$_1 \circ \$_2 = 0. \tag{8}$$

Uvažuje sa skrutka $\$ = (l, m, n | \, p, q, r)$. Súradnice primárnej a duálnej časti recipročnej skrutky $\$^r = (\bar{l}, \bar{m}, \bar{n} | \, \bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ sa vypočítajú zo vzťahu:

$$p.\bar{l} + q.\bar{m} + r.\bar{n} + l.\bar{p} + m.\bar{q} + n.\bar{r} = 0. \tag{9}$$

Ak skrutka $ určuje voľný pohyb telesa, potom recipročná skrutka $\$^r$ reprezentuje väzbu (silu alebo moment) vzhľadom na odobratý stupeň voľnosti. Naopak, ak $ predstavuje väzbu, potom $\$^r$ reprezentuje pohyb, ktorý telesu väzba umožňuje. [2] Uvažuje sa tuhé teleso, ktoré je spojené geometrickou väzbou s mechanizmom, pričom táto väzba telesu odoberá j stupňov voľnosti, $j < 6$. Množina všetkých lineárne nezávislých skrutiek popisujúcich pohyby, ktoré daná väzba telesu umožňuje, sa volá pohybový systém telesa S_m. Množina všetkých lineárne nezávislých skrutiek, ktoré sú súčasne recipročné ku všetkým skrutkám pohybového systému S_m, sa nazýva recipročný silový systém S^R [3]. Platí, že súčet voľných pohybov a väzieb je vždy šesť, preto:

$$\dim(S_m) + \dim(S^R) = 6. \tag{10}$$

1.1 Rotačná väzba

Nech sú dva členy mechanizmu spojené rotačnou väzbou. Rotačná väzba odoberá jeden stupeň voľnosti, preto jej zodpovedá jedna skrutka pohybového systému a päť skrutiek väzbového systému. Nech je pravouhlá súradnicová sústava definovaná tak, že os x zodpovedá osi kĺbu a začiatok súradnej sústavy leží na osi rotácie. Potom pohybová skrutka vyjadrujúca voľný pohyb je daná:

$$\$ = (1, 0, 0 | \, 0, 0, 0). \tag{11}$$

Väzby dané ako recipročné silové skrutky tvoria recipročný systém obsahujúci päť skrutiek v tvare:

$$\$_1^r = (1,0,0|\,0,0,0\,),$$
$$\$_2^r = (0,1,0|\,0,0,0\,),$$
$$\$_3^r = (0,0,1|\,0,0,0\,), \tag{12}$$
$$\$_4^r = (0,0,0|\,0,1,0\,),$$
$$\$_5^r = (1,0,0|\,0,0,1\,).$$

Vo všeobecnosti sa určí skrutka rotačnej väzby tak, že primárna časť $\boldsymbol{s}$ predstavuje smerový vektor osi rotácie. Duálny vektor $\boldsymbol{s^0}$ sa nájde ako vektorový súčin smerového vektora $\boldsymbol{s}$ priamky a polohového vektora $\boldsymbol{r}$ ľubovoľného bodu osi rotácie:

$$\boldsymbol{s^0} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}. \tag{13}$$

1.2 Posuvná väzba

Nech sú dva členy mechanizmu spojené posuvnou väzbou. Pravouhlá súradnicová sústava sa definuje tak, že smer posunu je definovaný v smere osi x.

Potom pohybová skrutka vyjadrujúca voľný pohyb je:

$$\$ = (0,0,0|\,1,0,0\,) \tag{14}$$

a väzby dané ako recipročné silové skrutky sú v tvare:

$$\$_1^r = (0,1,0|\,0\;0\;0\,),$$
$$\$_2^r = (0,0,1|\,0,0,0\,),$$
$$\$_3^r = (0,0,0|\,1,0,0\,), \tag{15}$$
$$\$_4^r = (0,0,0|\,0,1,0\,),$$
$$\$_5^r = (1,0,0|\,0,0,1\,).$$

Vo všeobecnosti posuvnej väzbe zodpovedá skrutka $\$ = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{s})$, ktorej duálna časť je vyjadrená smerovým vektorom posunutia $\boldsymbol{s}$.

2 POHYBLIVOSŤ MECHANIZMU

Uvažuje sa sériový kinematický reťazec tvorený h kinematickými dvojicami. Ako uvádzajú *Amine et al.* [4], pohybový systém sériového kinematického reťazca je daný ako zjednotenie pohybových skrutiek kinematických dvojíc:

$$S_m = \cup_{i=1}^{h} \$_i, \tag{16}$$

väzbový silový systém je naopak daný ako prienik väzbových skrutiek $\$_i^r$:

$$S^R = \cap_{i=1}^{h} \$_i^r. \tag{17}$$

Pohybový systém paralelného kinematického reťazca, ktorý je tvorený g sériovými vodiacimi reťazcami, je daný ako prienik pohybových systémov vodiacich reťazcov:

$$S_m = \cap_{i=1}^{g} S_{m\,i}, \tag{18}$$

väzbový silový systém je daný ako zjednotenie väzbových systémov S_i^R:

$$S^R = \cup_{i=1}^{h} S_i^R. \tag{19}$$

Zjednotenie skrutiek sa určí len ako zjednotenie množiny prvkov s vylúčením lineárne závislých skrutiek, prienik množiny skrutiek už je komplikovanejší. Preto sa pri určení pohyblivosti paralelného mechanizmu postupuje tak, že každej kinematickej dvojici v sériovom reťazci sa priradí pohybová skrutka. Určí sa pohybový systém sériového reťazca ako zjednotenie týchto kĺbových skrutiek (16). určí sa väzbový silový systém reťazca ako riešenie recipročnej úlohy k pohybovému systému (9). Postup sa zopakuje pre všetky sériové vodiace reťazce paralelného mechanizmu. Určí sa väzbový silový systém mechanizmu ako zjednotenie väzbových silových systémov jednotlivých reťazcov (19). Pohybový systém mechanizmu sa potom získa ako riešenie recipročnej úlohy (9) k väzbovému silovému systému mechanizmu.

3 ÚLOHA PRE RÝCHLOSTI

Nech otvorený kinematický reťazec tvorený členmi označenými j, $j+1$, $j+2$, ..., $m-2$, $m-1$, m, ktoré sú navzájom spojené skrutkovými väzby, kde ${}^{k}\$^{k+1}$ vyjadruje skrutkovú väzbu medzi členmi k a $k+1$. Potom sa rýchlosť člena m vzhľadom na člen j vypočíta ako:

$$\boldsymbol{{}^{j}V^{m}} = \omega_{j,j+1}\,{}^{j}\$^{j+1} + \omega_{j+1,j+2}\,{}^{j+1}\$^{j+2} + \cdots + \\ + \omega_{m-1,m}\,{}^{m-1}\$^{m}. \tag{20}$$

Pri stotožnení j-tého člena s bázou sériového robota a m-tý člen s jeho koncovým efektorom, sa získa rovnica pre výpočet relatívnej rýchlosti koncového efektora v skrutkovom tvare [5]. Zároveň sa získalo riešenie priamej úlohy pre rýchlosti v sériovom mechanizme. Výsledná rýchlosť koncového efektora sa potom určí na základe jednej polohy robota (vektorov osí rotačných väzieb a smerov posunutia translačných väzieb) a znalosti relatívnych rýchlostí jeho členov [6]. Po zápise rovnice (20) v maticovom tvare:

$$\left(\boldsymbol{{}^{0}V^{n}}\right)^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{J}.\boldsymbol{\Omega}, \tag{21}$$

kde:

$$\boldsymbol{J} = \left(\left({}^{0}\$^{1}\right)^{T} \quad \left({}^{1}\$^{2}\right)^{T} \quad \cdots \quad \left({}^{n-1}\$^{n}\right)^{T}\right) \tag{22}$$

je *Jacobiho matica* (jakobián) a

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\omega_{0,1}\;\omega_{1,2}\;\omega_{2,3}\ldots\omega_{n-1,n}\right)^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

je vektor relatívnych rýchlostí, dá sa nájsť aj riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti. Rovnica (21) sa vynásobí zľava inverznou maticou $\boldsymbol{J^{-1}}$, čím sa získa vyjadrenie vektora relatívnych rýchlostí (23) v tvare:

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{J^{-1}}\left(\boldsymbol{{}^{0}V^{n}}\right)^{\boldsymbol{T}}. \tag{24}$$

V prípade paralelného mechanizmu musí platiť, že relatívna rýchlosť pohyblivej platformy, ktorá teraz reprezentuje koncový efektor, musí byť rovnaká, nech sa spočíta podľa (21) cez ktorýkoľvek jej vodiaci reťazec. Problematickým sa ale ukazuje skutočnosť, že nie všetky kinematické dvojice v paralelnom

mechanizme sú riadené. Pasívne kinematické dvojice v rovnici (21) sa eliminujú tak, že sa rovnica vynásobí skrutkou súčasne recipročnou k všetkým skrutkám pasívnych dvojíc. Tento postup sa zopakuje pre všetky vodiace reťazce, čím sa dostane sústava rovníc, ktorej maticový tvar je:

$$\boldsymbol{A\Delta V^p} = \boldsymbol{B\Omega_a}, \tag{25}$$

kde:

$$\boldsymbol{A} = \left[\$_1^R\ \$_2^R\ \$_3^R\ \$_4^R\ \$_5^R\ \$_6^R\right] \tag{26}$$

je matica recipročných skrutiek ku skrutkám pasívnych kĺbov v jednotlivých vodiacich reťazcoch, $\boldsymbol{\Delta}$ je operátor polarity definovaný v (7):

$$\boldsymbol{B} = diag\left[\$_1^R \circ \$_{a_1},\ \$_2^R \circ \$_{a_2},\ \$_3^R \circ \$_{a_3},\ \$_4^R \circ \$_{a_4},\ \$_5^R \circ \$_{a_5},\ \$_6^R \circ \$_{a_6}\right] \tag{27}$$

je diagonálna matica koeficientov a

$$\boldsymbol{\Omega_a} = \left[\omega_{a_1},\ \omega_{a_2},\ \omega_{a_3},\ \omega_{a_4},\ \omega_{a_5},\ \omega_{a_6}\right]^T \tag{28}$$

je vektor relatívnych rýchlostí aktívnych kinematických dvojíc jednotlivých vodiacich reťazcov (vyjadrenia (26), (27), (28) sú zapísané pre paralelný mechanizmus so 6 aktuátormi) [5]. Ak má matica $\boldsymbol{A\Delta}$ inverznú maticu, po vynásobení rovnice (25) inverznou maticou $(\boldsymbol{A\Delta})^{-1}$ vyjde riešenie priamej úlohy pre rýchlosti. Ak existuje inverzná matica k matici $\boldsymbol{B}$, po vynásobení rovnice (25) maticou $\boldsymbol{B^{-1}}$ sa získa riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti.

Mechanizmus sa nachádza v singulárnej polohe, ak koncový efektor stráca jeden alebo viac stupňov voľnosti [7]. Singulárna poloha mechanizmu v matematickom vyjadrení predstavuje neexistenciu inverznej matice. Pre paralelné mechanizmy sa určujú singulárne polohy z rovnice (25). Rozlišujú sa tri typy singularít:

- *singularity 1. druhu - matica* **B** *je singulárna*,
- *singularity 2. druhu - matica* $\boldsymbol{A\Delta}$ *je singulárna*,
- *singularity 3. druhu - obe matice* $\boldsymbol{A\Delta}$ a **B** *sú singulárne* [8].

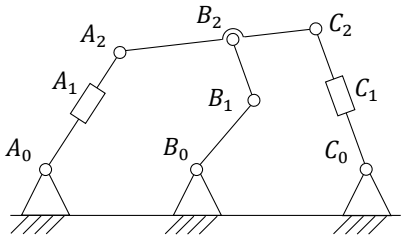
4 KINEMATICKÁ ANALÝZA PARALELNÉHO MECHANIZMU

Uvažuje sa rovinný paralelný mechanizmus, kde pohyblivá platforma je ku báze pripojená tromi vodiacimi reťazcami (obr. 1). Ako vidieť, vodiace reťazce nemajú rovnakú štruktúru - dva sú typu *RTR,* prostredný reťazec je typu *RRR.*

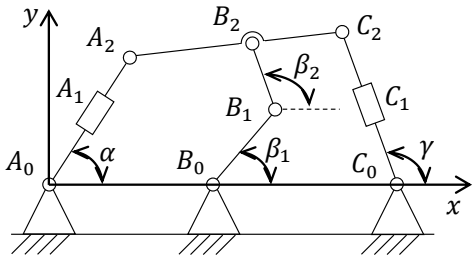
Najskôr sa určí pohyblivosť mobilnej platformy. Umiestnenie súradnicovej sústavy je na obr. 2.

Os z je kolmá na rovinu xy, orientovaná v zmysle pravidla pravej ruky. Dĺžky jednotlivých členov sú
$|A_0A_1| = L_1 \quad |A_1A_2| = L_2 \quad |A_0B_0| = H_0$
$|B_0B_1| = L_3 \quad |B_1B_2| = L_4 \quad |B_0C_0| = H_1$
$|C_0C_1| = L_5 \quad |C_1C_2| = L_6$

Uhly, ktoré zvierajú jednotlivé vodiace reťazce, sú vyznačené na obr. 2.



Obr. 1. Rovinný paralelný mechanizmus



Obr. 2. Súradnicová sústava pre rovinný mechanizmus

Pohyblivosť mobilnej platformy $A_2B_2C_2$ sa určí ako prienik pohyblivostí vodiacich reťazcov (18), respektíve ako zjednotenie väzbových systémov (19). Jednotlivým väzbám sa priradia pohybové skrutky podľa typu väzby.

Reťazec $A_0A_1A_2$:

$$\$_{A_0} = (0,0,1|0,0,0),$$
$$\$_{A_1} = (0,0,0|L_1\cos\alpha, L_1\sin\alpha, 0),$$
$$\$_{A_2} = (0,0,1|(L_1+L_2)\sin\alpha, -(L_1+L_2)\cos\alpha, 0). \tag{29}$$

Reťazec $B_0B_1B_2$:

$$\$_{B_0} = (0,0,1|0,-H_0,0),$$
$$\$_{B_1} = (0,0,1|L_3\sin\beta_1, -(H_0+L_3\cos\beta_1),0),$$
$$\$_{B_2} = \left(0,0,1\middle|\begin{matrix} L_3\sin\beta_1 + L_4\sin\beta_2, \\ -(H_0+L_3\cos\beta_1+L_4\cos\beta_2), 0 \end{matrix}\right). \tag{30}$$

Reťazec $C_0C_1C_2$:

$$\$_{C_0} = (0,0,1|0,-(H_0+H_1),0),$$
$$\$_{C_1} = (0,0,0|L_5\cos\gamma, L_5\sin\gamma, 0),$$
$$\$_{C_2} = \left(0,0,1\middle|\begin{matrix} (L_5+L_6)\sin\beta, \\ -(H_0+H_1+(L_5+L_6)\cos\gamma), 0 \end{matrix}\right). \tag{31}$$

Použitím rovnice (9) sa nájdu recipročné skrutky ku skrutkám jednotlivých vodiacich reťazcov. V reťazcoch $A_0A_1A_2$ a $C_0C_1C_2$ je riešením parametrická skrutka v tvare:

$$\$^r = (0,0,u|v,w,0), \quad u,v,w \in R. \tag{32}$$

Po rozdelení riešenia (32) na súčet skrutiek pre jednotlivé parametre bude väzbový systém vodiacich reťazcov:

$$\$_1 = (0,0,1|0,0,0),$$
$$\$_2 = (0,0,0|1,0,0), \tag{33}$$
$$\$_3 = (0,0,0|0,1,0).$$

V prípade reťazca $B_0B_1B_2$ však nastávajú dve možnosti v závislosti od toho, či:

$$\sin(\beta_1 - \beta_2) \tag{34}$$

má nulovú alebo nenulovú hodnotu. Pokiaľ platí, že $\beta_1 \neq \beta_2$, výraz (34) nadobúda nenulovú hodnotu. Reciprocná skrutka k reťazcu $B_0B_1B_2$ ako parametrická skrutka je v tvare (32) a teda väzbový systém je tiež v tvare (33).

Tento väzbový silový systém (33) je rovnaký pre všetky tri vodiace reťazce, preto väzbový silový systém mechanizmu, ktorý je zjednotením týchto väzbových silových systémov, je tiež v tvare (33). Pohybový systém mechanizmu sa nájde opäť vyriešením rovnice (9) ako množinu reciprocných skrutiek k väzbovému silovému systému (33). Pohybový systém mechanizmu obsahuje tri skrutky:

$$\begin{aligned} \$_1^m &= (0,0,1|0,0,0), \\ \$_2^m &= (0,0,0|1,0,0), \\ \$_3^m &= (0,0,0|0,1,0), \end{aligned} \tag{35}$$

mechanizmus má teda tri stupne voľnosti. Skrutka $\$_1^m$ určuje rotáciu okolo osi z, skrutka $\$_2^m$ určuje posuv v smere osi x a skrutka $\$_3^m$ určuje posuv v smere osi y.

Výraz (34) nadobúda nulovú hodnotu, ak $\beta_1 = \beta_2$, t.j. keď je rameno vystreté. V takom prípade je riešením parametrická skrutka:

$$\$^r = (t \cdot \operatorname{cotg}\beta_1, t, u|v, w, H_0 \cdot t), \quad t, u, v, w \in R,$$

ktorú sa môže rozdeliť na štyri reciprocné skrutky:

$$\begin{aligned} \$_1 &= (0,0,1|0,0,0), \\ \$_2 &= (0,0,0|1,0,0), \\ \$_3 &= (0,0,0|0,1,0). \end{aligned} \tag{36}$$

Zjednoteniu väzbových systémov reťazcov (33) a (36) zodpovedá práve systém (36), ktorý predstavuje väzbový systém mechanizmu. Nájdením reciprocných skrutiek k (36) sa získa pohybový systém mechanizmu:

$$\begin{aligned} \$_1^m &= (0,0,1|H_0 \cdot \operatorname{cotg}\beta_1, 0,0), \\ \$_2^m &= (0,0,0|-\operatorname{cotg}\beta_1, 1,0). \end{aligned} \tag{37}$$

Keďže pohybový systém mechanizmu obsahuje len dve skrutky, pri $\beta_1 = \beta_2$ stráca mechanizmus jeden stupeň voľnosti.

Pri formulácii rovnice rýchlostí je potrebné sa zaoberať len v prípade, kedy má mechanizmus tri stupne voľnosti.

4.1 Úloha pre rýchlosti

Na základe (35) bude pohybovému stavu mobilnej platformy zodpovedať pohybová skrutka:

$$\$_m = \left(0, 0, \omega_z|\, v_x, v_y, 0\right). \tag{38}$$

Rovnice pre rýchlosti vodiacich reťazcov (20) sú potom v tvare:

$$\begin{aligned} \left(0, 0, \omega_z|\, v_x, v_y, 0\right) &= \omega_{A_0}\$_{A_0} + v_{A_1}\$_{A_1} + \omega_{A_2}\$_{A_2}, \\ \left(0, 0, \omega_z|\, v_x, v_y, 0\right) &= \omega_{B_0}\$_{B_0} + \omega_{B_1}\$_{B_1} + \omega_{B_2}\$_{B_2}, \\ \left(0, 0, \omega_z|\, v_x, v_y, 0\right) &= \omega_{C_0}\$_{C_0} + v_{C_1}\$_{C_1} + \omega_{C_2}\$_{C_2}. \end{aligned} \tag{39}$$

Tri stupne voľnosti znamenajú, že v mechanizme sú tri riadené kinematické dvojice. Naformulujú sa rovnice rýchlostí a vyšetria sa singularity pre niektoré kombinácie umiestnenia aktuátorov vo vodiacich reťazcoch. Predpoklad je, že v každom reťazci je riadená jedna kinematická dvojica.

Vyšetrí sa kombinácia umiestnenia aktuátorov:

- A_0, B_0, C_0;
- A_1, B_1, C_1.

Na nájdenie rovnice rýchlostí vo vstupno- výstupnom tvare (25) sa musia vynásobiť jednotlivé rovnice v (39) postupne skrutkami reciprocnými ku pasívnym (neriadeným) väzbám. Zároveň tieto skrutky nesmú byť reciprocné ku skrutkám riadených väzieb. Reciprocné skrutky sú zosumarizované v tab. 1.

Tab. 1. Skrutky reciprocné ku pasívnym väzbám v reťazcoch

Aktívna väzba	Reciprocné skrutky
$\boldsymbol{A_0}$	$(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0\,\|0,0,L_1+L_2)$
$\boldsymbol{A_1}$	$(\cos\alpha, \sin\alpha, 0\,\|0,0,0)$
$\boldsymbol{B_0}$	$\left(\cos\beta_2, \sin\beta_2, 0 \left\| \begin{matrix} 0,0, \\ H_0\sin\beta_2 - L_3\sin(\beta_1-\beta_2) \end{matrix}\right.\right)$
$\boldsymbol{B_1}$	$\left(\begin{matrix} L_3\cos\beta_1 + L_4\cos\beta_2, \\ L_3\sin\beta_1 + L_4\sin\beta_2, 0 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} 0,0, \\ H_0(L_3\sin\beta_1 + L_4\sin\beta_2, \end{matrix}\right.\right)$
$\boldsymbol{C_0}$	$\left(\sin\gamma, -\cos\gamma, 0 \left\| \begin{matrix} 0,0, \\ -(H_0+H_1)\cos\gamma - (L_5+L_6) \end{matrix}\right.\right)$
$\boldsymbol{C_1}$	$(\cos\gamma, \sin\gamma, 0\,\|0,0,(H_0+H_1)\sin\gamma)$

Po vynásobení rovníc (39) reciprocnými skrutkami pre aktívne väzby A_0, B_0, C_0 bude rovnica (25) v tvare:

$$\begin{pmatrix} L_1+L_2 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ H_0\sin\beta_2 - L_3\sin(\beta_1-\beta_2) & \cos\beta_2 & \sin\beta_2 \\ (H_0+H_1)\cos\gamma + L_5 + L_6 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1+L_2 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3\sin(\beta_1-\beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_5+L_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{A_0} \\ \omega_{B_0} \\ \omega_{C_0} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Z rovnice (57) vynásobením inverznou maticou k matici koeficientov na ľavej strane vyjde rýchlosť mobilnej platformy pre danú konfiguráciu a okamžité rýchlosti riadených členov. Po vynásobení rovnice (40) inverznou maticou k matici koeficientov na pravej strane sa získa riešenie inverznej úlohy pre rýchlosti, t. j. rýchlosti riadených kinematických dvojíc, ak je známa okamžitá rýchlosť mobilnej platformy pri danej konfigurácii.

Z rovnice (40) sa dajú určiť taktiež singulárne polohy mechanizmu. Mechanizmus má singularitu 1. druhu, ak:

$$\begin{vmatrix} L_1 + L_2 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 \sin(\beta_1 - \beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_5 + L_6 \end{vmatrix} = 0. \qquad (41)$$

Keďže dĺžky $L_1, L_3, L_5 \neq 0$, mechanizmus môže byť v singulárnej polohe 1. druhu len, ak $\beta_1 = \beta_2$. Mechanizmus má singularitu 2. druhu, ak:

$$\begin{vmatrix} L_1 + L_2 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ H_0 \sin\beta_2 - L_3 \sin(\beta_1 - \beta_2) & \cos\beta_2 & \sin\beta_2 \\ (H_0 + H_1)\cos\gamma + L_5 + L_6 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad (42)$$

Respektíve:

$$(L_1 + L_2)\cos(\beta_2 - \gamma) + H_0 \sin\beta_2 \sin(\alpha - \gamma) - L_3 \sin(\beta_1 - \beta_2)\sin(\alpha + \gamma) - (H_0 + H_1)\cos\gamma \cos(\alpha + \beta_2) - (L_5 + L_6)\cos(\alpha + \beta_2) = 0. \qquad (43)$$

Dosiahnutie singularity 2. druhu by vyžadovalo také natočenie vodiacich reťazcov, pri ktorom by rovnica (43) bola splnená. Po vynásobení rovníc (39) recipročnými skrutkami pre aktívne väzby A_1, B_1, C_1 bude mať rovnica (25) tvar:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ H_0 B_y & B_x & B_y \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 L_4 \sin(\beta_1 - \beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{A_1} \\ \omega_{B_1} \\ v_{C_1} \end{pmatrix}, \qquad (44)$$

kde sa označilo pre jednoduchosť:

$$L_3 \cos\beta_1 + L_4 \cos\beta_2 = B_x,$$
$$L_3 \sin\beta_1 + L_4 \sin\beta_2 = B_y.$$

Mechanizmus má singularitu 1. druhu, ak:

$$\begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 L_4 \sin(\beta_1 - \beta_2) & 0 \\ 0 & 0 & L_5 \end{vmatrix} = 0. \qquad (45)$$

Keďže dĺžky $L_1, L_3, L_4, L_5 \neq 0$, mechanizmus môže byť v singulárnej polohe 1. druhu len, ak $\beta_1 = \beta_2$. Mechanizmus má singularitu 2. druhu, ak

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ H_0 B_y & B_x & B_y \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad (46)$$

respektíve

$$H_0 B_y (\sin\alpha \cos\gamma - \cos\alpha \sin\gamma) = 0. \qquad (47)$$

Singularity 2. druhu môžu nastať v dvoch prípadoch: buď je priemet reťazca $B_0 B_1 B_2$ do smeru osi y nulový, t.j. $\beta_1 = \beta_2 = 0$ alebo $\beta_1 = \beta_2 = \pi$, alebo $\alpha = \gamma$ a teda reťazce $A_0 A_1 A_2$ a $C_0 C_1 C_2$ sú rovnobežné.

ZÁVER

V príspevku boli aplikované princípy *Screw theory* pri riešení kinematickej analýzy rovinného paralelného mechanizmu s tromi vodiacimi reťazcami. Dva z reťazcov boli typu *RTR*, prostredný reťazec typu *RRR*. Určil sa počet stupňov voľnosti mechanizmu a zodpovedajúce pohyby mobilnej platformy. V závislosti od umiestnenia aktuátorov sa našiel vstupno-výstupný tvar rovnice pre rýchlosti a podmienky, za akých dosiahne mechanizmus singulárnu polohu.

Poďakovanie

Táto práca bola vytvorená v rámci projektu KEGA 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov pre zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni štúdia na technických VŠ.

LITERATÚRA

[1] HARIB, K. H. et al. (2012): *Parallel, Serial and Hybrid Machine Tools and Robotics Structures:* Comparative Study on Optimum Kinematic Designs, Serial and Parallel Robot Manipulators - Kinematics, Dynamics, Control and Optimization, Serdar Kucuk (Eds.), pp.109-124.

[2] HUANG, Z. - LI, Q. - DING, H. (2013): *Theory of Parallel Mechanisms*. Dordrecht, Springer, 421 s. ISBN 978-94-007-4201-7.

[3] ZHAO, J. et al. (2014): *Advanced Theory of Constraint and Motion Analysis for Robot Mechanisms*. Oxford, Academic Press, 496 s. ISBN 978-0-12-420223-8.

[4] AMINE, S. et al. (2011): *Constraint and Singularity Analysis of Lower-Mobility Parallel Manipulators with Parallelogram Joints*. In: Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2010. 34th Annual Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. Montreal, Quebec, 2, pp. 1317-1326.

[5] GALLARDO-ALVARADO, J. (2016): *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Dordrecht, Springer, 377 s. ISBN 978-3-319-31124-1.

[6] KARGER, A. - KARGEROVÁ, M. (2000): *Základy robotiky a prostorové kinematiky*. Praha, ČVUT, 265 s. ISBN 80-01-02183-1.

[7] JAZAR, R. N. 2010. *Theory of Applied Robotics. Kinematics, Dynamics, and Control*. 2. vydanie. New York, Springer, 888 s. ISBN 978-1-4419-1749-2.

[8] ZLATANOV, D. - FENTON, R. G. - BENHABIB, B. (1994): *Singularity analysis of mechanisms and robots via a velocity-equation model of the instantaneous kinematics*. In: Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation, vol. 2. s. 980-985.