ŽILINSKÁ UNIVERZITA V ŽILINE
Strojnícka fakulta

DOI: https://doi.org/10.26552/tech.C.2025.2.12

Spracovanie technických materiálov z matematického hľadiska

Zuzana Malacká, RNDr., PhD.*
Katedra aplikovanej matematiky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215, 010 26 Žilina.
E-mail: zuzana.malacka@fstroj.uniza.sk, Tel.: + 421 41 513 4961, Fax.: + 421 41 525 2541

Processing technical materials from a mathematical perspective

Abstract: The processing of technical materials is a key process in many industries, such as mechanical engineering, automotive, aerospace and energy. Mathematical modelling of these processes allows for a better understanding and optimization of processing techniques, which leads to increased efficiency and product quality. This article focuses on the application of mathematical methods in the processing of technical materials, including the analysis of mechanical properties, thermal behaviour and material flow dynamics. Examples from the fields of forming, welding and casting are presented, demonstrating the importance of mathematical approaches in improving the quality and efficiency of production.

Keywords: mathematical modelling of materials, physical model, optimization.

ÚVOD

Matematické modelovanie sa stalo neoddeliteľnou súčasťou inžinierskej praxe, najmä v oblasti spracovania technických materiálov. Umožňuje nielen pochopenie základných fyzikálnych procesov, ale aj predikciu správania materiálov pri rôznych technologických operáciách. Cieľom tohto článku je ukázať, aká je nutnosť matematických vedomostí - konkrétne derivácií a integrálov aj v tejto oblasti a poskytnúť prehľad o aplikácii matematických metód pri spracovaní materiálov, s dôrazom na ich praktické využitie a výhody. Spracovanie technických materiálov zahŕňa rôzne procesy ako je tavenie, lisovanie, kovanie, zváranie, odlievanie a obrábanie. Každý z týchto procesov má svoje špecifické požiadavky na materiálové vlastnosti, tepelné správanie a mechanické zaťaženie. Matematika poskytuje nástroje na modelovanie týchto procesov, analýzu dát, čo je nevyhnutné pre optimalizáciu výrobných techník, predpovedanie správania materiálov a zlepšenie kvality konečných výrobkov.

1 MECHANICKÉ VLASTNOSTI MATERIÁLOV

Pre pochopenie správania materiálov počas ich spracovania sú kľúčové mechanické vlastnosti materiálov. Medzi tieto vlastnosti patria pevnosť, tvrdosť, pružnosť a elasticita. Tieto vlastnosti môžu byť modelované pomocou rôznych matematických prístupov.

Pri skúšaní vlastností kovových materiálov dochádza počas namáhania skúšobného telesa spravidla najskôr k elastickej deformácii, potom k plastickej deformácii, po ktorej nasleduje lom.

Elastické správanie sa popisuje *Hookovým zákonom*. *Hookov zákon* je vhodný v prípadoch:

- *malých elastických deformácií*: keď sú deformácie dostatočne malé, aby sa materiál správal elasticky a vrátil sa do pôvodného stavu po odstránení zaťaženia,
- *lineárnej závislosti medzi napätím a deformáciou:* pre materiály, ktoré vykazujú lineárnu závislosť medzi napätím a relatívnym predĺžením (deformáciou),
- *jednoduchých geometrických tvarov*: pri analýze jednoduchých tvarov, ako sú prúty alebo tyče, kde je možné predpokladať rovnomerné rozloženie napätia a deformácie:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{1}$$

kde σ je napätie,
E je modul pružnosti,
ε je deformácia.

Tento vzťah je základom pre analýzu mechanického správania materiálov pri ťahu alebo tlaku, platí len pre pružné deformácie a je aplikovateľný do tzv. *meze úmernosti*, kde materiál ešte neprešiel do plastickej oblasti.

1.1 Plastické správanie

Pri analýze deformácií materiálov v technických aplikáciách sa často používajú tenzory deformácie, ktoré umožňujú kvantifikovať zmeny v tvare a

veľkosti materiálu. Tieto tenzory sa transformujú medzi rôznymi referenčnými rámcami pomocou špecifických pravidiel.

Tenzor deformácie je vhodný v prípadoch:

- *veľkých deformácií*, ak sú deformácie dostatočne veľké, že lineárne aproximácie (ako *Hookov zákon*) už nie sú presné,
- *nelineárneho správania materiálu*, pri materiáloch, ktoré vykazujú nelineárnu závislosť medzi napätím a deformáciou,
- *zložitejších geometrických tvarov*, pri analýze zložitejších tvarov a štruktúr, kde je potrebné presne modelovať rozloženie napätia a deformácie v rôznych smeroch.

Deformačný gradient $\boldsymbol{F}$ je základný tenzor, ktorý popisuje, ako sa mení pozícia bodu v materiáli počas deformácie. Je definovaný ako gradient mapovania medzi počiatočnou (referenčnou) konfiguráciou $\boldsymbol{X}$ a aktuálnou (deformovanou) konfiguráciou $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}}, \tag{2}$$

Tento tenzor je druhého rádu a obsahuje informácie o rozťahovaní a rotácii materiálu. Jeho determinant det($\boldsymbol{F}$) udáva zmenu objemu elementu objemu počas deformácie. Deformačný gradient môže byť rozložený pomocou polárnej dekompozície na rotáciu $\boldsymbol{R}$ a pravý tenzor rozťahovania $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}, \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{R}$ je ortogonálny tenzor reprezentujúci rotáciu,

$\boldsymbol{U}$ je pozitívne definitný tenzor reprezentujúci čisté rozťahovanie.

1.2 Tenzor deformácie (Strain Tensor)

Tenzory deformácie sa používajú v mechanike kontinua na matematické opísanie deformácie telesa v priestore. Tenzor deformácie je druhého rádu tenzor, ktorý popisuje zmeny v tvare materiálu bez zohľadnenia rotácie. Pre malé deformácie sa používa infinitesimálny tenzor deformácie ε, ktorý je symetrický a definovaný ako:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(F^T \cdot F - I \right), \tag{4}$$

kde I je identitný tenzor.

Tento tenzor obsahuje informácie o normálnych a šmykových deformáciách materiálu. Pre väčšie deformácie sa používa *Green-Lagrangeov* tenzor deformácie E, ktorý je definovaný ako:,

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left(F^T \cdot F - I \right), \tag{5}$$

Tento tenzor je tiež symetrický a poskytuje presnejší popis deformácií pri väčších zmenách tvaru.

1.3 Transformácia tenzorov deformácie

Pri zmene referenčného rámca sa tenzory deformácie transformujú podľa pravidla:

$$\varepsilon' = R^T \cdot \varepsilon \cdot R, \tag{6}$$

kde R je rotačný tenzor,

ε je tenzor deformácie v pôvodnom rámci,

ε' je tenzor deformácie v novom rámci.

Toto pravidlo zabezpečuje, že fyzikálne vlastnosti materiálu zostávajú nezmenené pri zmene referenčného rámca.

2 PRÍKLAD POUŽITIA HOOKOVHO ZÁKONA PRI CNC OBRÁBANÍ OCEĽOVÝCH DIELOV

CNC obrábanie (frézovanie) na výrobu presných mechanických súčiastok. Ak použijeme ako materiál oceľ s vysokou pevnosťou (napr. 42*CrMo*4) a chceme dosiahnuť požadovanú presnosť a kvalitu povrchu pri minimalizácii deformácií.

2.1 Aplikácia Hookovho zákona

Pomocou *Hookovho zákona* (pretože sa predpokladá lineárna závislosť medzi napätím a deformáciou) môžeme odhadnúť, ako sa materiál bude správať pri pôsobení reznej sily, čo umožňuje nastaviť optimálne parametre obrábania (rýchlosť posuvu, rezné rýchlosti).

3 PRÍKLAD POUŽITIA TENZORA DEFORMÁCIE NA TVÁRNENIE HLINÍKOVÝCH PLECHOV

Hliníkový plech (napr. *EN AW*-1050), chceme použiť na výrobu automobilových karosárskych dielov, čo dosiahneme hlbokým ťahaním. Chceme dosiahnuť požadovaný tvar bez vzniku trhlín a s rovnomerným rozložením hrúbky plechu.

3.1 Aplikácia tenzora deformácie

Pri veľkých deformáciách je potrebné zohľadniť nelineárne správanie materiálu. Tenzor deformácie umožňuje analyzovať zmeny v tvare a objeme materiálu v rôznych bodoch plechu počas procesu, čo pomáha optimalizovať parametre tvárnenia a predchádzať defektom.

4 TEPELNÉ SPRÁVANIE MATERIÁLOV

Tepelné správanie materiálov počas spracovania je ovplyvnené procesnými parametrami, ako je rýchlosť ohrevu, chladenia a tepelné vlastnosti materiálu. Napríklad pri tepelnom spracovaní kovov je dôležité riadiť teplotu a čas ohrevu, aby sa dosiahli požadované mechanické vlastnosti materiálu. Matematické modely umožňujú simulovať teplotné rozdelenie v materiáli počas ohrevu a chladenia.

Jedným z používaných vzorcov je Fourierova rovnice tepelnej vodivosti, ktorá popisuje distribúciu teploty v materiáli:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \cdot \nabla^2 \cdot T \,, \tag{7}$$

kde T je teplota,

t je čas,

α je tepelná difúznosť,

$\nabla^2 \cdot T$ je *Laplaceov* operátor.

Riešením tejto rovnice pomocou numerických metód, ako je :

1. *Metóda konečných prvkov* (*FEM*), môžeme získať teplotné pole v materiáli počas spracovania.
2. *Metóda Monte Carlo* - aplikuje sa na simuláciu náhodných procesov, ako je šírenie tepla v materiáloch s nehomogénnou štruktúrou.

4.1. Príklad 1

Pri ohreve oceľového plechu s počiatočnou teplotou 20°C na 900°C počas 30 minút môžeme pomocou *FEM* simulácie získať teplotné rozdelenie v materiáli a určiť optimálny čas a teplotu ohrevu pre dosiahnutie požadovaných mechanických vlastností.

4.2 Dynamika materiálových tokov

Dynamika materiálových tokov je kľúčovým prvkom v optimalizácii výrobných a logistických procesov. Je dôležitá pri procesoch, ako je odlievanie, kováčske formovanie a tvárnenie ale taktiež je dôležitá aj v oblastiach ako sú logistika a zásobovanie. Matematické modelovanie týchto tokov umožňuje efektívne riadenie zásob, minimalizáciu nákladov a zlepšenie celkovej výkonnosti systému. Na jej analýzu sa využívajú rôzne matematické modely a rovnice, ktoré popisujú správanie materiálov v systémoch. V tomto kontexte sa často využívajú metódy ako *analýza materiálových tokov* (*MFA*), *metóda konečných prvkov* (*FEM*) a *metóda diskrétnych prvkov* (*DEM*).

Patria tu:

Navier-Stokesove rovnice sú základnými rovnicami popisujúcimi pohyb tekutín. Sú odvodené z princípov zachovania hmoty a hybnosti a sú základom pre analýzu dynamiky tekutín v rôznych oblastiach, ako je inžinierstvo, fyzika a meteorológia.

Na modelovanie prúdenia materiálov, ako sú kvapaliny a plyny, sa používajú základné rovnice mechaniky kontinua (základné rovnice *Navier-Stokesovej* sústavy):

(a) *rovnice kontinuity* (*zachovanie hmoty*):

$$\nabla \cdot u = 0 \,. \tag{8}$$

Pre nekompresibilnú tekutinu (konštantná hustota ρ) sú *Navier-Stokesove* rovnice vyjadrené nasledovne:

b) rovnice hybnosti (*zachovanie hybnosti*)*:*

Navier-Stokesove rovnice pre popis pohybu viskóznych tekutín:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial v} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \mu \cdot \nabla^2 v + f \,, \tag{9}$$

kde ρ hustota tekutiny,

v je rýchlostný vektor,

∇p je gradient tlaku,

μ je dynamická viskozita,

f sú vonkajšie sily (napr. gravitačná sila).

Odvodenie týchto rovníc vychádza z aplikácie základných princípov mechaniky na malý objem tekutiny:

- *zachovanie hmoty*: zabezpečuje, že hmotnosť tekutiny sa nestráca ani nevytvára v kontrolovanom objeme.
- *zachovanie hybnosti*: vyjadruje rovnováhu medzi silami pôsobiacimi na tekutinu a zmenou jej hybnosti.
- *zachovanie energie*: zohľadňuje prenos tepla a prácu vykonanú na tekutine.

Tieto princípy vedú k formulácii rovníc, ktoré popisujú dynamiku tekutiny s ohľadom na jej rýchlosť, tlak, viskozitu a vonkajšie sily a používajú sa na modelovanie prúdenia tekutín v rôznych aplikáciách, ako je prenos tepla (navrhovanie efektívnych dopravných systémov, ako sú potrubia a ventilačné systémy), pri návrhu dizajnu lietadiel a analýzu aeodynamiky. V praxi sa matematické modely materiálových tokov využívajú v rôznych oblastiach, a to:

- vo výrobe**:** optimalizácia výrobných liniek a procesov na základe analýzy materiálových tokov,
- v logistike: efektívne riadenie skladovania a distribúcie materiálov.

5 APLIKÁCIE MATEMATICKÝCH METÓD V TECHNOLOGICKÝCH PROCESOCH

Matematické rovnice sú neoddeliteľnou súčasťou analýzy a optimalizácie procesov tvárnenia, zvárania a odlievania technických materiálov. Umožňujú inžinierom a technológom modelovať správanie materiálov pri rôznych podmienkach, čo vedie k efektívnejšiemu a kvalitnejšiemu spracovaniu.

5.1 Tvárnenie materiálov

Pri tvárnení materiálov je dôležité pochopiť správanie materiálu pri deformácii. Matematické modely umožňujú simulovať procesy ako je ťahanie alebo

lisovanie, čo vedie k optimalizácii parametrov a zlepšeniu kvality výrobkov.

5.1.1 Rovnica pre výpočet sily potrebnej na ohýbanie

Pri ohýbaní plechov sa používa empirická rovnica na výpočet potrebnej ohybovej sily:

$$P = \frac{k \cdot Y \cdot L \cdot t^2}{D}, \qquad (10)$$

kde P je ohybová sila [N],

k je empirický koeficient závislý od typu nástroja,

Y je medza klzu materiálu [MPa],

L je dĺžka ohybu [mm],

t je hrúbka plechu [mm],

D je polomer ohybu [mm].

5.1.2 Príklad 2

Pre materiál s medzou klzu 500 MPa, dĺžkou ohybu 400 mm, hrúbkou plechu 2,5 mm a polomerom ohybu 25 mm, s koeficientom k = 1,3, sa ohybová sila vypočíta z rovnice (10) ako:

$$P = \frac{1{,}3 \cdot 500 \cdot 400 \cdot (2{,}5)^2}{25} = 65 \text{ kN}.$$

5.3 Zváranie

Numerické modelovanie zváracích procesov, ako je zváranie trením, umožňuje analyzovať tepelné a mechanické účinky počas zvárania. Tieto modely pomáhajú predchádzať defektom a zlepšovať mechanické vlastnosti zváraných spojov .

5.3.1 Výpočet energie potrebnej na zváranie

Pri zváraní je dôležité vypočítať množstvo energie potrebnej na roztavenie materiálu. Používa sa rovnica:

$$E = \rho \cdot V \cdot \Delta T, \qquad (11)$$

kde E je potrebná energia [J],

ρ je hustota materiálu [kg·m^3],

V je objem roztaveného materiálu [m^3],

ΔT je rozdiel medzi teplotou tavenia a teplotou zvárania [K].

5.3.2 Príklad 3

Pre oceľovú dosku s hustotou $\rho = 7850$ kg·m^3, objemom $V = 0{,}01$ m^3 a teplotným rozdielom $\Delta T = 1500$ K, sa energia vypočíta použitím rovnice (11):

$$E = 7850 \cdot 0{,}01 \cdot 1500 = 117750 \text{ J}. \qquad (11)$$

5.3 Odlievanie

Pri odlievaní kovov je dôležité modelovať tok tekutého kovu a jeho tuhnutie. Matematické modely, vrátane magnetohydrodynamických simulácií, umožňujú optimalizovať procesy ako je odlievanie do elektromagnetických foriem, čo vedie k zlepšeniu kvality odliatkov. Pri odlievaní zliatin sa používa *Scheil-Gulliverova* rovnica:

$$C_L = C_0 \cdot f_L^{k-1}, \qquad (12)$$

kde C_L je koncentrácia v kvapalnej fáze,

C_0 je počiatočná koncentrácia,

f_L je frakcia kvapalnej fázy,

k je distribučný koeficient.

Rovnica (12) umožňuje predpovedať zloženie kvapalnej a tuhej fázy počas tuhnutia zliatiny, čo je kľúčové pre kontrolu kvality odliatkov a predchádzanie defektom ako je segregácia.

5.4 Rezanie kovov

Pri rezaní kovov je potrebné modelovať interakciu medzi rezným nástrojom a materiálom. Pomocou *FEM* môžeme analyzovať rozdelenie napätí a teplôt v reznej zóne. Rovnice, ktoré popisujú tento proces, zahŕňajú:

- *Navier-Stokesove rovnice* pre prúdenie tekutín,
- *Fourierov zákon* pre prenos tepla,
- *Newtonov zákon* pre popis pohybu rezného nástroja.

Matematika, jej základné znalosti ako napr. aj derivácie a integrály sú dôležitými nástrojmi a zohrávajú v oblasti spracovania technických materiálov kľúčovú úlohu pri analýze, optimalizácii a predikcii správania materiálov počas výrobných procesov. Tieto nástroje umožňujú inžinierom a technológom modelovať a riadiť zložité procesy, čo vedie k efektívnejšiemu využívaniu zdrojov, zlepšeniu kvality výrobkov a zníženiu nákladov.

5.5 Aplikácie derivácií a integrálov v spracovaní materiálov

5.5.1 Analýza teplotných polí a prenosu tepla

Pri procesoch ako tavenie, kalenie alebo zváranie je dôležité pochopiť, ako sa teplota mení v čase a priestore. Pomocou parciálnych derivácií môžeme modelovať tepelné vedenie a prenos tepla v materiáloch, čo umožňuje optimalizovať parametre procesov a zabrániť nežiaducim zmenám štruktúry materiálu.

5.5.2 Modelovanie mechanických vlastností materiálov

Derivácie sa používajú na analýzu napätí a deformácií v materiáloch. Napríklad, pomocou *Hookovho zákona* sa dá vyjadriť vzťah medzi napätím a deformáciou v elastických materiáloch, čo je základom pre návrh a analýzu konštrukčných prvkov.

5.5.3 Optimalizácia výrobných procesov

Integrály sa používajú na výpočet veličín ako sú celková spotreba energie alebo hmotnosti počas výrobného procesu. Tieto informácie sú nevyhnutné pre optimalizáciu procesov, zníženie nákladov a minimalizáciu environmentálneho dopadu výroby.

5.5.4 Simulácia a analýza dynamických systémov

Pri analýze dynamických systémov, ako je prúdenie tekutín v potrubiach alebo správanie sa materiálov pri rôznych zaťaženiach, sa využívajú diferenciálne rovnice. Tieto rovnice umožňujú predpovedať správanie systému v čase a optimalizovať jeho výkon.

ZÁVER

Matematické rovnice poskytujú neoceniteľné nástroje na analýzu a optimalizáciu procesov spracovania materiálov. Ich aplikácia vedie k zlepšeniu kvality výrobkov, zvýšeniu efektivity výroby a zníženiu nákladov. Preto je ich znalosť a správne využitie nevyhnutné i pre inžinierov a technológov v oblasti spracovania materiálov.

Poďakovanie

Tento článok vznikol za podpory projektu KEGA 025\ ŽU-4/2024.

LITERATÚRA

[1] MORAVEC, J. (2012): *Malá príručka tvárnenia kovov.* 3. vydanie, ŽU Žilina, 146 s, ISBN 978 - 80-8070-554-0544-5.

[2] JOHNSON, N.S. - VULIMIRI, P.S. - TO, A.C. - ZHANG, X. - BRICE, C.A. - KAPPES, B.B. - STEBNER, A.P. (2020): *Invited review: Machine learning for materials developments in metals additive manufacturing, Additive Manufacturing,* Volume 36, 2020, 101641, ISSN 2214-8604, https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101641.

[3] RYAN, M. E. - DUTTA, A. (1982): *Mathematical modeling of the blow-molding process.* In: Polymer Engineering & Science, *22*(17), 1075-1083.

[4] STANGLE, G. C. (1998). *Modelling of Materials Processing*. Springer.