
Parametricky modulovaný oscilátor v asymptotickom prípade

Ján Minárik, Ing.*

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: minarik20@stud.uniza.sk

Branislav Ftorek, doc. Mgr., PhD.

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: branislav.ftorek@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4962

Radoslav Chupáč, RNDr., PhD.

Katedra aplikovanej mechaniky, Strojnícka fakulta,
Žilinská univerzita v Žiline,
Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina.
E-mail: radoslav.chupac@fstroj.uniza.sk, Tel.: +421 41 513 4954

Parametrically modulated oscillator in the asymptotic case

Abstract: This article deals with the asymptotic solution in analytical form of some second-order linear differential equation with time-dependent parameters. Time-periodic modulation of the parameters of the oscillatory system can lead to interesting phenomena. The analytical solution is compared with the numerical solution obtained by the *Runge-Kutta method* in the *MATLAB* environment. The convergence conditions of this analytical method are discussed.

Keywords: oscillation, differential equation, asymptotic solution, *Mathieu equation*.

ÚVOD

Vibrácie sú prirodzeným javom, ktorý vzniká pri činnosti každého strojného zariadenia. V praxi sú vibrácie väčšinou považované za negatívny jav, ktorý je potrebné v čo najväčšej miere potlačiť, pretože predstavujú zvýšenú záťaž pre zariadenia a sú zdrojom energetických strát. Preto môžu viesť k poruchám a v hraničných prípadoch až k deštrukcii zariadení, nepresnostiam výroby, uvoľňovaniu spojov a iným medzným stavom. Okrem toho, vibrácie a najmä nimi spôsobený hluk, taktiež predstavujú pre človeka významné zdravotné riziko. Tieto javy sú prítomné pri každom zariadení, pričom sa nejedná len o stroje obsahujúce pohyblivé časti, ale aj o statické konštrukcie, ktoré sú napr. zaťažované dynamicky alebo sa nachádzajú v dostatočnej blízkosti zdroja vibrácií.

Pri návrhu konštrukcií je možné vykonať aj modálnu analýzu, ktorej úlohou je určiť vlastné tvary a vlastné frekvencie kmitania, t. j. frekvencie, na ktorých sa ustáli kmitanie systému po jeho vybudení. Ak je frekvencia budiacej sily dostatočne blízka vlastnej frekvencii systému, dochádza k rezonancii - veľkým

nárastom výchylky kmitania aj pri malých budiacich silách. Rezonančné javy sú nebezpečné a môžu viesť až ku kolapsu konštrukcií. Na základe výsledkov modálnej analýzy je možné určiť, akým prevádzkovým stavom je potrebné sa vyhnúť alebo napr. navrhnuť modálne preladenie konštrukcie, t. j. zmenu vlastných frekvencií [1, 2].

Vibrácie však nepredstavujú len negatívny dej. Existuje množstvo strojov a zariadení, ktorých princíp je založený na tomto jave, ako napr. vibračné zhutňovače betónu, sitá, cestné valce alebo skúšobné stavy pri dynamických skúškach. Rovnako existujú rôzne procesy, ktoré využívajú vibrácie, resp. vysokofrekvenčné kmitanie. Ide napr. o ultrazvukové obrábanie, ktoré umožňuje spracovanie veľmi tvrdých materiálov alebo o ultrazvukovú defektoskopiu, ktorá sa využíva na nedeštruktívne zisťovanie porúch v materiáloch. Vibrácie a hluk sú v neposlednom rade významným ukazovateľom pri meraní a diagnostike strojov. Zvýšené vibrácie a hluk sú prirodzeným prejavom poškodenia alebo všeobecne, blížiaceho sa medzného stavu zariadenia [1, 2].

Medzi zdroje vibrácií patria najmä pohyblivé časti strojov, napr. rotujúce časti, ložiská, dotýkajúce sa

povrchy, ozubené kolesá a rôzne iné komponenty. Zdrojom môžu byť taktiež zaťažujúce sily, napr. impulzy síl a momentov pri činnosti spaľovacích motorov alebo prúdiace tekutiny. Pohyblivé časti zvyčajne vykonávajú periodický pohyb s určitou frekvenciou, pri ktorom vznikajú dynamické reakčné sily, ktoré sa prenášajú na zvyšok konštrukcie a vyvolávajú jej kmitanie.

Pri riešení technických problémov sa využívajú matematické modely, ktoré popisujú skúmaný fyzikálny systém. Skutočné modely sú veľmi zložité, pretože je v nich zahrnuté množstvo rôznych vplyvov, ktoré sú často stochastické alebo aj neznáme. V dôsledku toho by bolo riešenie takýchto úloh príliš komplikované, resp. až nemožné. Pri tvorbe matematických modelov sa preto uvažujú rôzne zjednodušenia, na základe ktorých vznikajú aproximácie reálnych systémov. Aproximované modely teda zanedbávajú určité javy, čo významne uľahčuje riešenie skúmaných problémov, no zároveň každé zjednodušenie spôsobuje vznik nepresností. Správna aproximácia by teda mala vo vhodnej miere zjednodušiť riešený problém, pričom získané výsledky by mali byť dostatočne presné, aby mohli byť považované za relevantné [1].

1 KMITAJÚCE SYSTÉMY

Matematickým modelom kmitajúceho systému s jedným stupňom voľnosti je diferenciálna rovnica 2. rádu, ktorej koeficienty sú vo všeobecnosti funkcie závislé od času. Je to napríklad pohyb lineárneho oscilátora s nekonštantnými tlmiacimi a tuhostnými charakteristikami. Diferenciálna rovnica:

$$\ddot{x} + p(t) \cdot \dot{x} + q(t) \cdot x = 0 \quad (1)$$

so spojitémi a periodickými funkciami $p(t)$ a $q(t)$ sa nazýva *Hillova diferenciálna rovnica*. Jej špeciálnym prípadom je *Mathieuho rovnica*:

$$\ddot{x} + [\omega_0^2 + \varepsilon \cdot \cos t] \cdot x = 0, \quad (2)$$

ktorú v 70. rokoch 19. storočia dostal *É. Mathieu* pri štúdiu kmitania eliptickej membrány popísanej parciálnou diferenciálnou rovnicou hyperbolického typu [3].

Reálne deje, vrátane kmitania, sú častokrát nelineárne a ich matematický popis vedie na nelineárne diferenciálne rovnice, resp. systémy týchto rovníc. V takýchto prípadoch môžeme použiť numerické metódy alebo tiež kombinácie numericko-analytických aproximácií. Okrem toho môžeme úlohu linearizovať, čo síce často umožní jej analytické riešenie, dochádza však ku vzniku rôznych typov nepresností, ktoré toto riešenie môžu úplne znehodnotiť. Nelineárne fyzikálne fenomény môžu byť popísané rovnicou s časovo závislými členmi:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x + \varepsilon \cdot f(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (3)$$

V prípade malého parametra ε , $0 < \varepsilon \ll 1$, sa môžu pri riešení použiť známe asymptotické metódy [4, 5]. Pri použití metódy malého parametra hľadáme riešenie v tvare radu:

$$x(t) = A(t) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) + \varepsilon \phi_1(t) + \varepsilon^2 \phi_2(t) + \dots + \varepsilon^n \phi_n(t) + \dots, \quad (4)$$

kde $A(t), \varphi(t), \phi_1(t), \dots, \phi_n(t), \dots$ sú neznáme funkcie.

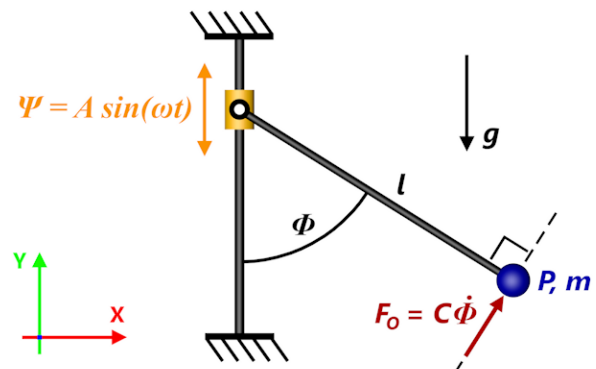
Ďalšou známou a používanou metódou je *WKB aproximácia (Wentzel–Kramers–Brillouin)* pre problémy s veľkým parametrom $\lambda \rightarrow \infty$ v diferenciálnej rovnici typu:

$$\ddot{x} + f(x, \lambda)x = 0. \quad (5)$$

2 ANALYTICKÁ APROXIMÁCIA

Uvažujme voľné tlmené kmitanie kyvadla v prípade, že záves vertikálne osciluje a táto oscilácia nech je daná dvakrát spojito diferencovateľnou periodickou funkciou ψ . Pohybová rovnica kyvadla má všeobecný tvar [3] a kyvadlo je na obr. 1.

$$\ddot{\phi} + C \cdot \dot{\phi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{\ddot{\psi}}{l}\right) \cdot \sin \phi = 0. \quad (6)$$



Obr. 1. Kyvadlo s oscilujúcim závesom

Pre jednoduchosť uvažujme vertikálnu osciláciu kyvadla popísanú harmonickou funkciou s amplitúdou A :

$$\psi = A \cdot \sin \omega t. \quad (7)$$

Zavedením substitúcií:

$$\gamma = C/2, \quad \omega_0^2 = g/l, \quad A^* = \omega^2 A/g$$

a následnou linearizáciou diferenciálnej rovnice (1), využitím prvého člena *Maclaurinovho rozvoja* $\sin \phi \sim \phi$ upravíme (1) do tvaru lineárnej diferenciálnej rovnice:

$$\ddot{\phi} + 2 \cdot \gamma \cdot \dot{\phi} + \omega_0^2 \cdot (1 + A^* \sin \omega t) \cdot \phi = 0. \quad (8)$$

Tento tvar je špeciálnym prípadom *Hillovej diferenciálnej rovnice*. Uvažujme jednoduchú počiatočnú podmienku:

$$\phi(0) = \phi_0 = q. \quad (9)$$

Aby sme odstránili člen obsahujúci ϕ , zavedieme substitučný výraz:

$$\phi = e^{-\gamma t} y. \quad (10)$$

Dosadením výrazu (3) a jeho druhej derivácie do (2), máme rovnicu:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 \left(1 + A^* \sin \omega t - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) y = 0. \quad (11)$$

Predpokladajme, že konštanta ω nadobúda dostatočne veľké hodnoty ($\omega \gg 1$). Potom môžeme hľadať periodicky modulované riešenie rovnice (4) v analogickom tvare ako v [6]:

$$y = \cos \Omega t (q + \eta \sin \omega t), \quad (12)$$

kde $\eta, \Omega > 0$ predstavujú neznáme parametre.

Zároveň tiež predpokladáme, že η bude dosahovať dostatočne malú hodnotu ($\eta \ll 1$). Počiatočná podmienka $\phi_0 = q$ je zahrnutá priamo v tvare riešenia (5), ktoré však nezohľadňuje druhú počiatočnú podmienku pre $\dot{\phi}_0$.

Pre prvú a druhú deriváciu (5) platí:

$$\dot{y} = -q\Omega \sin \Omega t - \eta\Omega \sin(\Omega t) \sin \omega t \quad (13)$$

$$+ \eta\omega \cos(\Omega t) \cos \omega t,$$

$$\ddot{y} = -q\Omega^2 \cos \Omega t - \eta\Omega^2 \cos(\Omega t) \sin \omega t$$

$$- 2\eta\omega\Omega \sin(\Omega t) \cos \omega t$$

$$- \eta\omega^2 \cos(\Omega t) \sin \omega t. \quad (14)$$

Po dosadení (6) a (7) do rovnice (4) a po následnej úprave dostávame:

$$0 = \cos(\Omega t) [-q\Omega^2 + q\omega_0^2 - q\gamma^2 + \eta\omega_0^2 A^* \sin^2 \omega t + \eta \sin(\omega t) (-\Omega^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - \gamma^2 + \frac{q\omega_0^2 A^*}{\eta})] + R, \quad (15)$$

$$\text{kde } R = -2\eta\omega\Omega \sin(\Omega t) \cos \omega t$$

predstavuje reziduálny člen. Použitím vzťahu

$$\sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)/2, \quad (16)$$

zanedbaním R a výrazu s členom $\cos 2\omega t$ dostaneme sústavu rovníc, ktorej riešením sú neznáme parametre η a Ω :

$$-\Omega^2 + \omega_0^2 - \gamma^2 + \frac{\eta\omega^2 A}{2ql} = 0, \quad (17)$$

$$-\eta\Omega^2 - \eta\omega^2 + \eta\omega_0^2 - \eta\gamma^2 + \frac{q\omega^2 A}{l} = 0. \quad (18)$$

Pričom sme už vykonali resubstitúciu $A^* \rightarrow A$.

Vyjadrením Ω^2 z (9) a jeho dosadením do (10), dostávame kvadratickú rovnicu pre neznámy parameter η :

$$\eta^2 \frac{\omega^2 A}{2ql} + \eta\omega^2 - \frac{q\omega^2 A}{l} = 0. \quad (19)$$

Korene tejto rovnice sú:

$$\eta_{1,2} = -\frac{ql}{A} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{A^2}{l^2}}\right). \quad (20)$$

Spätným dosadením (12) do (9) vyjadříme parameter Ω :

$$\Omega_{1...4} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2 - \frac{\omega^2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{A^2}{l^2}}\right)}. \quad (21)$$

Hodnoty parametrov následne volíme na základe podmienky $\eta, \Omega > 0$. Aproximácia riešenia rovnice (2) má vzhľadom na (3) tvar:

$$\phi = e^{-\gamma t} \cos \Omega t (q + \eta \sin \omega t). \quad (22)$$

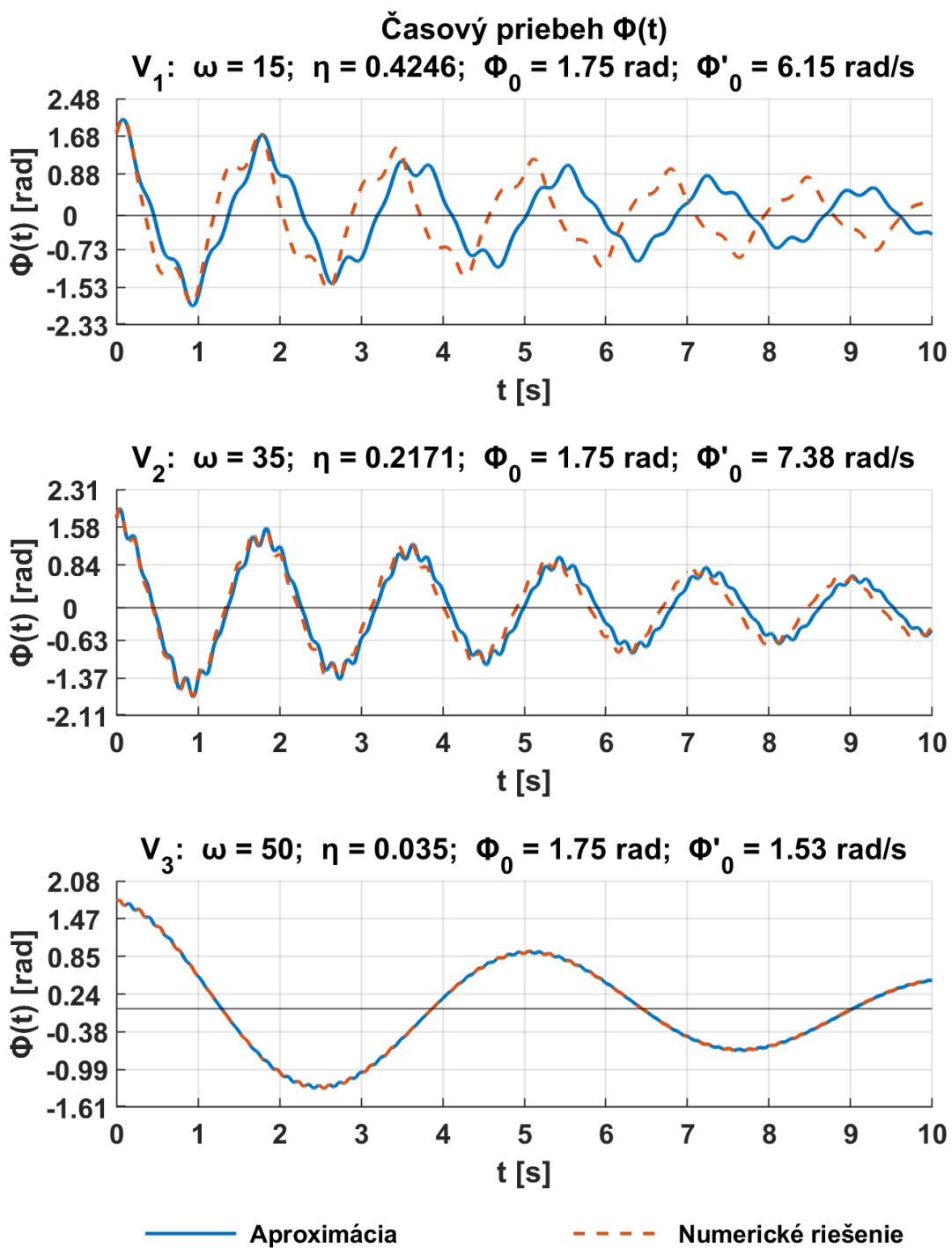
Pre úplné počiatočné podmienky potom platí $\phi_0 = q$ a položíme tiež $\dot{\phi}_0 = \eta\omega - q\gamma$.

Porovnanie aproximácie (14) a numerického riešenia je na obr. 2, časové priebehy rozdielov medzi týmito riešeniami sú uvedené na obr. 3. Výpočty boli vykonané pre rôzne hodnoty parametrov (variant V_1 až V_3), ktoré vrátane počiatočných podmienok, sú uvedené v tab. 1 a tab. 2.

Dominantný vplyv na presnosť aproximácie má parameter ω , pričom rozdiel medzi numerickým a asymptotickým riešením klesá s rastúcou hodnotou ω , v súlade s uvedeným predpokladom ($\omega \gg 1$). Súčasne môžeme vidieť, že pokles týchto rozdielov súvisí tiež s klesajúcou hodnotou vypočítaného malého parametra η . Najväčší rozdiel medzi riešeniami je v prípade variantu V_1 a najmenší pre variant V_3 .

Podrobnejšie porovnanie poskytuje obr. 3, na ktorom sú uvedené odchýlky medzi riešeniami v jednotlivých časových krokoch, vrátane kvadratických priemerov (*Priemer*) a maximálnych absolútnych hodnôt odchýlok (*Maximum*) za daný časový interval. Tu je rovnako možné vidieť, že s nárastom hodnoty ω dochádza k poklesu hodnôt uvedených štatistických veličín.

Funkcia $\phi(t)$, ktorá je riešením rovnice (8) je daná súčtom dvoch zložiek, φ_1 a φ_2 , ktoré sú uvedené na obr. 4 (pre variant V_2). Zložka φ_1 popisuje pohyb linearizovaného matematického kyvadla s tlmením, s maximom výchylky daným počiatočnou podmienkou q a vlastnou frekvenciou zodpovedajúcou parametru Ω . Vysokofrekvenčná zložka φ_2 je vyvolaná kmitaním závesu, s ktorým zdieľa vlastnú frekvenciu ω . Tá má dominantný vplyv na presnosť aproximácie. Zložka φ_2 je tiež ovplyvnená hodnotou malého parametra η , ktorý je daný vzťahom (12). Na obr. 5 je uvedený fázový portrét sústavy pre V_3 . Modrý bod označuje začiatok a červený bod koniec pohybu.



Obr. 2. Porovnanie aproximácie a numerického riešenia

Tab. 1. Parametre sústavy

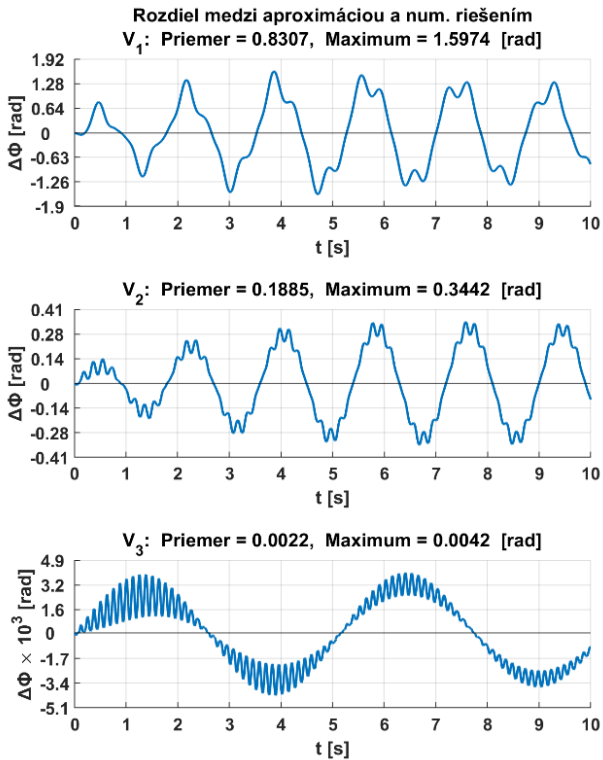
Volené parametre sústavy					
Variant	ω	l	C	A	g
V_1	15,0	2,00	0,25	0,50	10,0
V_2	35,0	4,00	0,25	0,50	10,0
V_3	50,0	10,0	0,25	0,20	10,0

Tab. 2. Vypočítané parametre pre modelové sústavy

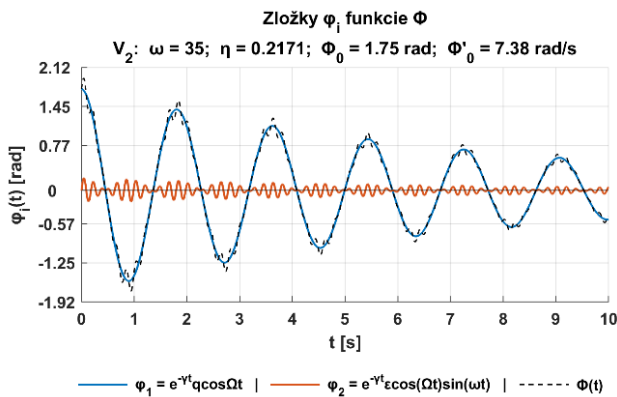
Vypočítané parametre a počiatočné podmienky				
Variant	η	ω	ϕ_0	$\dot{\phi}_0$
V_1	0,4246	3,4364	1,75	6,15
V_2	0,2171	3,4614	1,75	7,38
V_3	0,0350	1,2183	1,75	1,53

Rozmer parametrov v tab. 1 a tab. 2:

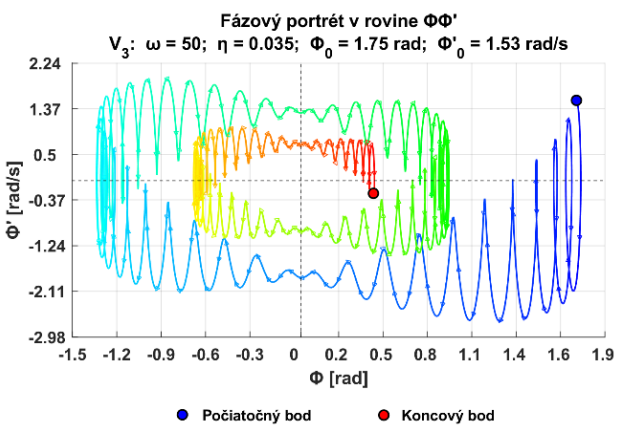
$$\omega \left[\frac{1}{s} \right], C \left[\frac{1}{s} \right], A [m], g \left[\frac{m}{s^2} \right], \Omega \left[\frac{1}{s} \right], \phi_0 [rad], \dot{\phi}_0 [rad/s], \eta [-].$$



Obr. 3. Presnosť aproximácie



Obr. 4. Zložky aproximatívneho riešenia



Obr. 5. Fázový portrét systému

ZÁVER

Všade okolo nás existujú rôzne typy technických systémov. Pracovať s popisom reálnych systémov je však často príliš zložité až nemožné, preto pracujeme s určitými zjednodušeniami a vytvárame zodpovedajúce matematické modely. Pri tvorbe týchto modelov je nutné zanedbať niektoré nepodstatné zložky a naopak zachovať tie, ktoré sú z hľadiska fungovania systému podstatné.

Modelom mnohých dejov je spojený dynamický systém, ktorého stav sa spojitým mení v čase. Podľa parametrov fyzikálneho modelu rozlišujeme systémy so sústredenými parametrami, ktoré sú opisované obyčajnými diferenciálnymi rovnicami a systémy s rozloženými parametrami, ktorých modelom sú parciálne diferenciálne rovnice. Teória a popis dynamických systémov sú úzko previazané s teóriou diferenciálnych rovníc a ich systémov.

Teória diferenciálnych rovníc patrí medzi klasické partie matematiky a jej aparát je nevyhnutný pre vedecko-technické výpočty v rôznych aplikovaných oblastiach. Poznatky o modeloch dynamických sústav sú v značnej miere medziodborové, za predpokladu, že sú tieto sústavy popísané rovnakým modelom, a to diferenciálnou rovnicou určitého typu, resp. systémom diferenciálnych rovníc.

Diferenciálne rovnice, ktoré sú matematickým modelom kmitajúcich sústav dokážeme riešiť analyticky len v prípade rovníc s konštantnými koeficientami a bez nelineárnych členov, ktoré nemožno zanedbať. Riešenie nelineárnych sústav značne komplikuje skutočnosť, že v ich prípade neplatí princíp superpozície. Všeobecný postup analytického riešenia týchto rovníc neexistuje, preto je nutné voliť rôzne druhy zjednodušení, zanedbanie rôznych typov a prejavov nelinearity, príp. považovať nelinearity za slabé poruchy príslušného lineárneho systému. Sú vypracované určité aproximatívne a asymptotické metódy pre riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré nie sú lineárne, resp. nemajú konštantné koeficienty.

Niektoré približné analytické metódy poskytujú pomerne dobré aproximácie riešení nelineárnych diferenciálnych rovníc, no veľakrát sme odkázaní len na numerické algoritmy. Tie sú do značnej miery spoľahlivé, avšak neumožňujú nám globálny pohľad na správanie nelineárnych systémov. Perspektívny a možný je práve kombinovaný prístup numericko-analytický. Štúdium nelineárnych systémov je perspektívnou oblasťou aplikovaného výskumu, ktorá v súčasnosti zaznamenáva značný rozvoj, pričom nelineárna dynamika a nelineárne dynamické systémy sú neoddeliteľnou súčasťou inžinierskej praxe (pozri napr. práce [7, 8])

V nelineárnych sústavách vznikajú a sú prítomné fenomény, ktoré v sústavách modelovaných

lineárnymi diferenciálnymi rovnicami nemôžu existovať, napr. chaos, bifurkácie riešení, subharmonické a ultraharmonické kmity, solitónové riešenia vlnových rovníc a pod. [9].

Pod'akovanie

Táto práca bola vytvorená v rámci projektu KEGA 025ŽU-4/2024 Implementácia nových didaktických prostriedkov pre zvýšenie kvality výučby matematiky v inžinierskom stupni štúdia na technických VŠ.

LITERATÚRA

[1] MINÁRIK, J. (2024): *Kmitanie mechanických sústav*. Diplomová práca, Strojnícka fakulta UNIZA, EDIS.

[2] SMETANA, C. a kol. (1998): *Hluk a vibrace, měření a hodnocení*. 1. Vyd. Praha: Sdělovací technika, 188 s., ISBN 80-901936-2-5.

[3] ŠREMR, J. (2023): *Floquetova teorie a stabilita lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu s periodickými koeficienty*. In: *Pokroky matematiky fyziky a astronomie*. 4, ročník 68, s. 246-274, ISSN 0032-2423.

[4] STRUBLE, R. A. (1962): *Nonlinear differential equations*. McGraw-Hill book company, New York.

[5] MURRAY, J. D. (1984): *Asymptotic analysis*. In: *Applied mathematical sciences*, Springer-Verlag, New-York.

[6] FTOREK, B. - ORŠANSKÝ, P. - ŠAMAJOVÁ (2018): *Parametric oscillations of the mechanical systems*. In: *MATEC Web Conf*. Vol. 157.

[7] YAKUBU, G. - OLEJNIK, P. - AWREJEWICZ, J. (2022): *On the Modeling and Simulation of Variable-Length Pendulum Systems: A Review*. In: *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29 (4), pp. 2397-2415.

[8] DOBIÁŠ, I. (1988): *Nelineární dynamické soustavy s náhodnými vstupy*. Praha, Academia-nakladatelství ČSAV, 208 s.

[9] STROGATZ, S. H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*. Westview Press, Cambridge.